4. domača naloga iz Računalništva 3

(rok za oddajo: ponedeljek, 22. februar 2010, do 12h)

Na predavanjih smo dokazali naslednji izrek:

Izrek (Hall, 1935): *Naj bo G dvodelen graf z dvodelnim razbitjem $V(G) = A \cup B$. Potem v grafu G obstaja prirejanje, ki pokrije množico A, natanko tedaj, ko za vsako množico $U \subseteq A$ velja*

$$|U| \leq |N(U)| \,.$$

Pri tem $N(U)$ označuje tiste točke grafa G, ki so sosednje s kako točko iz U,

$$N(U) = \{\, v \in V(G);\ \exists u \in U : uv \in E(G)\} \,.$$

Z uporabo Hallovega izreka smo na vajah pokazali naslednjo posledico:

Posledica: *Naj bo G dvodelen graf z dvodelnim razbitjem $V(G) = A \cup B$. Potem za moč največjega prirejanja v grafu G velja*

$$\max\{\, |M|;\ M \textit{ je prirejanje v } G\} = |A| - \max\{\, |U| - |N(U)|;\ U \subseteq A\}.$$

Podobno vlogo, kot jo ima Hallov izrek pri dvodelnih grafih, ima pri splošnih grafih Tutteov izrek. Za njegovo formulacijo potrebujemo naslednjo oznako. Za množico $U \subseteq V(G)$ bomo s $q_G(U)$ označili število lihih komponent grafa $G - U$.

Izrek (Tutte, 1947): *Graf G ima popolno prirejanje natanko tedaj, ko za vsako množico $U \subseteq V(G)$ velja*

$$|U| \geq q_G(U) \,.$$

Vaša naloga je, da dokažete naslednjo posledico Tutteovega izreka:

Posledica (Berge, 1958): *Za moč največjega prirejanja v grafu G velja*

$$2 \cdot \max\{\, |M|;\ M \textit{ je prirejanje v } G\} = |A| - \max\{\, q_G(U) - |U|;\ U \subseteq A\}.$$