1. kolokvij, 12. 2. 1994

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $b \in \mathbb{R}^{m}$. Potem velja:

Sistem lin. neenačb $Ax \le b, x \ge 0$ ima rešitev ntk za vsak $y \in \mathbb{R}^m$, za katerega velja $A^T y \ge 0, y \ge 0$, sledi $b^T y \ge 0$.

Nasvet: Zapiši sistem neenakosti kot LP.

Pogledamo $\max 0^T x$ p.p. $Ax \le b, x \ge 0$.

Ta LP je bodisi nedopusten ali pa ima opt. rešitev.

Opt. rešitev ima ntk ima dani sistem neenak. rešitev.

Pogledamo njegov dual:

$$\min b^T y \quad \text{p.p.} \quad A^T y \ge 0, y \ge 0.$$

($\Rightarrow$) Naj ima sistem neenačb rešitev.
Potem ima LP opt. rešitev z vred. 0.
Zato ima tudi dual opt. rešitev z vred. 0.
Torej za vsako dop. reš. duala velja $b^T y \ge 0$.

Opomba. Ta smer gre zlahka tudi brez duala. (skal. prod. z $y$)

($\Leftarrow$) Naj velja: $A^T y \ge 0, y \ge 0 \Rightarrow b^T y \ge 0$. $(*)$
Dualni program je dopusten ($y = 0$ npr.).
Zaradi $(*)$ je omejen, torej ima opt. rešitev (z vred. 0).
Njegov dual (ki je naš LP) ima tudi opt. rešitev.
Torej tudi dopustno rešitev, ta pa je rešitev sistema neenačb.

$\square$

Sledi Farkaseva lema ($\overset{1902}{1894}$):

$$\exists x \ge 0 : Ax = b \iff b^T y \ge 0 \text{ za vsak } y : A^T y \ge 0$$

Dokazali smo že: $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $q \in \mathbb{R}^m$

$$Px \leq q,\ x \geq 0 \text{ ima rešitev} \iff \forall y \in \mathbb{R}^m : (P^T y \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow q^T y \geq 0)$$

Farkaseva lema (1894, 1902) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

$$Ax = b,\ x \geq 0 \text{ ima rešitev} \iff \forall y \in \mathbb{R}^m : (A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0)$$

A B

A $\iff$ $\begin{array}{l} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \\ x \geq 0 \end{array}$ ima rešitev $\quad P = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix},\ q = \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$

že dokazano

$$\iff \forall y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m} : \left( \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq 0,\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq 0 \right) \quad C$$

$$A^T(y_1 - y_2) \geq 0,\ y_1, y_2 \geq 0 \Rightarrow b^T(y_1 - y_2) \geq 0$$

($\Rightarrow$) C $\Rightarrow$ B

Naj bo $y \in \mathbb{R}^m$ in $A^T y \geq 0$. Za C vzamemo $y =: y_1 - y_2$, $y_1, y_2 \geq 0$.
Leva stran v C velja, zato sledi desna: $b^T y \geq 0$.

($\Leftarrow$) B $\Rightarrow$ C

Naj velja $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$: $y_1, y_2 \geq 0$ in $A^T(y_1 - y_2) \geq 0$.

Potem $y := y_1 - y_2 \in \mathbb{R}^m$ in velja $A^T y \geq 0$.

Po B sledi $b^T y \geq 0$, tj. $b^T(y_1 - y_2) \geq 0$.