Računalništvo 3, 2. izpit, 31. 8. 2009

Naloga 2 [25 točk]

Dana sta matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in vektor $c \in \mathbb{R}^n$. Za vektor $b \in \mathbb{R}^m$ z $LP(b)$ označimo linearni program

$$\min\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

(a) Naj bo $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m$ množica tistih vektorjev b, za katere ima linearni program $LP(b)$ optimalno rešitev. Dokaži, da je množica $\mathcal{D}$ konveksna. (Opomba: prazna množica je konveksna po definiciji.)

(b) Naj bo $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ preslikava, ki vektorju $b \in \mathcal{D}$ priredi optimalno vrednost linearnega programa $LP(b)$. Dokaži, da je funkcija f konveksna.

Pomagali si bomo z dualnostjo:

lin. prog. $LP(b)$: $\min\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$

dual $LP(b)^*$: $\max\{b^T y \mid A^T y \leq c\}$

Izrek o krepki dualnosti pove, da ima $LP(b)$ opt. rešitev ntk ima optimalno rešitev $LP(b)^*$, optimalni vrednosti pa sta vedno enaki.

Opazimo tudi, da je množica dop. rešitev za $LP(b)^*$ neodvisna od b.

(a) Vzemimo $b_1, b_2 \in \mathcal{D}$ in $\lambda \in [0,1]$. Pišimo $b_0 := \lambda b_1 + (1-\lambda) b_2$. Potem je tudi $LP(b_0)^*$ dopusten in za vsako njegovo dopustno rešitev y velja:

$$(*) \qquad b_0^T y = (\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2)^T y = \lambda b_1^T y + (1-\lambda) b_2^T y \leq \lambda f(b_1) + (1-\lambda) f(b_2)$$

y je dopusten za $LP(b_1)^*$, $LP(b_2)^*$

Sledi, da ima $LP(b_0)^*$ optimalno rešitev, saj je dopusten in navzgor omejen.

Ocena $(*)$ tudi dokazuje, da je fnc f iz tč (b) konveksna, saj iz nje sledi

$$(**) \qquad f(b_0) = f(\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2) \leq \lambda f(b_1) + (1-\lambda) f(b_2).$$

Računalništvo 3, 2. izpit, 31. 8. 2009 – nadaljevanje

Opomba.

Ni nujno, da v oceni (**) velja enačaj.

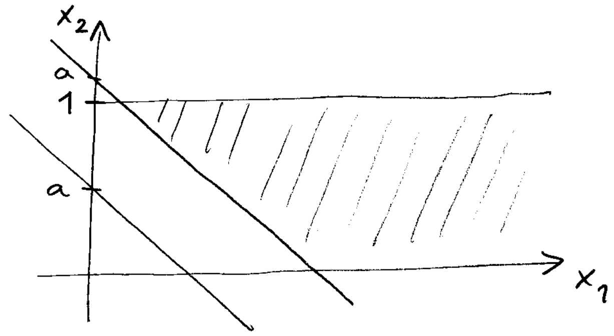
$$\min x_1$$

p.p.

$$-x_1 - x_2 \leq -a$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Pogledamo $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 2$, $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$z^*(a) = \begin{cases} a-1 \, ; & a \geq 1 \\ 0 \, ; & a \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} z^*\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} z^*(2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$ desna stran

$$z^*\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\right) = z^*\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} \left(< \frac{1}{2}\right)$$ leva stran

Računalništvo 3, 1. kolokvij, 12. 2. 2009

2. Dokaži, da za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in vsak vektor $b \in \mathbb{R}^m$ velja natanko ena od spodnjih trditev:

(a) $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b$;

(b) $\exists y \in \mathbb{R}^m : (y \ge 0 \wedge A^T y = 0 \wedge b^T y = -1)$.

Dokazati moramo $(a) \Leftrightarrow \neg(b)$.

Zapišimo $\neg(b)$ v bolj priročni obliki:

$$\neg(b) \sim \neg \exists y \in \mathbb{R}^m : (y \geq 0 \wedge A^T y = 0 \wedge b^T y = -1)$$
$$\sim \forall y \in \mathbb{R}^m : (\neg(y \geq 0 \wedge A^T y = 0) \vee b^T y \neq -1)$$
$$\sim \forall y \in \mathbb{R}^m : (y \geq 0 \wedge A^T y = 0 \Rightarrow b^T y \neq -1)$$
$$\sim \forall y \in \mathbb{R}^m : (y \geq 0 \wedge A^T y = 0 \Rightarrow b^T y \geq 0)$$

Pri zadnji enakovrednosti smo upoštevali, da je množica y-ov, ki zadošča $y \geq 0$ in $A^T y = 0$, zaprta za množenje z nenegativnimi skalarji, tako da $b^T y$ na njej zavzame vse ali pa nobene negativne vrednosti.

Sedaj opazimo, da gre za varianto Farkaseve leme. (Tudi dokaz lahko navedimo na enak način.)

$(a) \Leftrightarrow$ $\max\ 0^T x$ p.p. $Ax \leq b$ ima opt. reš. z vrednostjo 0 $\overset{\text{krepka dualnost}}{\Longleftrightarrow}$ $\min\ b^T y$ p.p. $A^T y = 0$, $y \geq 0$ ima opt. rešitev z vrednostjo 0 (vrednost 0 dobimo pri $y = 0$)

$\Leftrightarrow$ Za vsak $\underbrace{\text{dop.}}_{A^T y = 0,\ y \geq 0}$ y velja $b^T y \geq 0$.

Opt. metode (IŠRM), 1. kolokvij, 5.4.2007

3. Dokaži, da za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ obstajata taka vektorja $x \in \mathbb{R}^n$ in $y \in \mathbb{R}^m$, da velja:

$$Ax \leq 0_m, \qquad x \geq 0_n, \qquad A^T y \geq 0_n, \qquad y \geq 0_m, \qquad Ax < y \quad \text{in} \quad -A^T y < x.$$

Opomba: Ključni sta strogi neenakosti pri zadnjih dveh pogojih. Če bi tam dovolili tudi enakost, trditev očitno drži, saj lahko vzamemo $x = 0_n$ in $y = 0_m$.

Najprej poiščemo delne rešitve, ki jih nato združimo v končno rešitev naloge.

Iščemo $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$: $Ax \leq 0, x \geq 0, A^T y \geq 0, y \geq 0, Ax \leq y, -A^T y \leq x$

na i-ti komponenti naj bo strogo

Ločimo dve možnosti:

(i) $\exists y: A^T y \geq 0, y \geq 0$ in $y_i > 0$

Potem vzamemo še $x := 0$.

(ii) Za $\forall y: A^T y \geq 0, y \geq 0$ je $y_i = 0$.

V tem primeru pogledamo lin. prog.

$$\begin{aligned} &\max c^T y \qquad c = [0, \dots, \underset{\uparrow\, i}{1}, \dots, 0]^T \\ &\text{p.p.} \\ &\quad A^T y \geq 0 \\ &\quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Ta lin. prog. je dopusten (npr. $y = 0$), vrednost opt. rešitve pa je po predpostavki enaka 0. Po izreku o krepki dualnosti sledi, da ima tudi njegov dual opt. rešitev z vrednostjo 0:

$$\begin{aligned} &\min 0^T x \\ &\text{p.p.} \\ &\quad -A x \geq c \iff Ax \leq -c = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Vzamemo torej $y = 0$ in x, ki je dopustna rešitev duala.

Če namesto A gledamo $-A^T$ (in zamenjamo vlogi x in y), dobimo pare x, y, kjer imamo eno strogo neenakost pri $-A^T y \leq x$.

Dobljenih $m+n$ x-ov in y-ov seštejemo in po linearnosti dobimo iskano rešitev.

Posledica (Tucker)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ poševnosimetrična matrika, tj. $A^T = -A$. Potem obstaja tak vektor $z \in \mathbb{R}^n$, da velja $z \geq 0$, $Az \geq 0$ in $z + Az > 0$.

↑ strogo na vsaki komponenti

Dokaz.

Uporabimo prejšnjo trditev za matriko $-A$: Dobimo vektorja $x, y \in \mathbb{R}^n$, za katera velja

$$\begin{array}{lll} -Ax \leq 0 & (-A)^T y \geq 0 & -Ax < y \\ x \geq 0 & y \geq 0 & A^T y < x \end{array}$$

↑ strogo na vsaki kompon.

Zgornje neenakosti ob upoštevanju $A^T = -A$ preuredimo in dobimo

$$\begin{array}{lll} Ax \geq 0 & Ay \geq 0 & Ax > -y \iff Ax + y > 0 \\ x \geq 0 & y \geq 0 & Ay > -x \iff Ay + x > 0 \end{array}$$

Vzemimo $z := x + y$.

Potem imamo

$$Az = A(x+y) = Ax + Ay \geq 0 + 0 = 0,$$

$$z = x + y \geq 0 + 0 = 0,$$

$$z + Az = x + y + A(x+y) = x + Ay + y + Ax > 0.$$

Vektor z ima torej res želene lastnosti.

$\square$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

$$\mathcal{D}' = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$$

Trditev.

Če sta $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ neprazni, potem je vsaj ena neomejena.

Dokaz.

Lema.

(a) $\mathcal{D}$ omejena $\iff \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0,\ x \geq 0\} = \{0\}$

(b) $\mathcal{D}'$ omejena $\iff \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y \geq 0,\ y \geq 0\} = \{0\}$

Dokaz.

Zadošča dokazati (a), ker potem (b) sledi, če vzamemo $A \to -A^T$, $b \to -c$.

($\Rightarrow$) Naj bo $\mathcal{D}$ omejena. Če bi obstajal $r \neq 0$: $Ar \leq 0, r \geq 0$, bi tudi za λr, $\lambda > 0$, veljalo $A\lambda r \leq 0$, $\lambda r \geq 0$. Če je $x_0 \in \mathcal{D}$, potem tudi $x_0 + \lambda r \in \mathcal{D}$: $A(x_0 + \lambda r) = \underbrace{Ax_0}_{\leq b} + \underbrace{\lambda Ar}_{\leq 0} \leq b$, $\underbrace{x}_{\geq 0} + \underbrace{\lambda r}_{\geq 0} \geq 0$.

To pa je v protislovju z omejenostjo $\mathcal{D}$.

($\Leftarrow$) Recimo, da $\mathcal{D}$ ni omejena. Potem je tudi lin. prog.

$\max \underbrace{1\!\!1^T x}$, p.p. $Ax \leq b, x \geq 0$ neomejen. Z metodo sc. tabl

$\hookrightarrow$ raste v ∞, ker $x \geq 0$

lahko najdemo x_0, $r \neq 0 \in \mathbb{R}^n$: $x_0 + \lambda r \in \mathcal{D}$, $\forall \lambda \geq 0$.

Ker je $x_0 + \lambda r \geq 0$, $\forall \lambda \geq 0$, sledi $r \geq 0$.

Ker je $A(x_0 + \lambda r) = Ax_0 + \lambda Ar \leq b$, $\forall \lambda \geq 0$, sledi $Ar \leq 0$.

Torej tudi r pripada množici na desni. $\rightarrow\leftarrow$

$\square$ lema

Recimo, da sta obe množici $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ omejeni. Potem je po lemi edini par rešitev x, y, ki reši $Ax \leq 0, x \geq 0, A^T y \geq 0, y \geq 0$ par $x = 0$, $y = 0$. Po "prejšnji" trditvi pa vemo, da obstaja tudi rešitev, ki zadošča $Ax < y$ (in $-A^T y < x$). Ker $A0 \not< 0$, dobimo protislovje.

$\square$