

Največja krogla v konveksnem poliedru

Jernej Rus

3. 11. 2009

Naloga

Dan je polieder \mathcal{P} , opisan s presekom zaprtih polprostorov, $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n; a_i^T x \leq b_i; i = 1, 2, \dots, m\}$. Poiskati želimo največjo kroglo, ki je vsebovana v poliedru \mathcal{P} .

- Zapiši gornjo nalogo v obliki linearnega programa.
- Zapiši dual linearnega programa iz točke a).

Rešitev

a) Naloga, zapisana v obliki linearnega programa:

Spremenljivke so: $s \in \mathbb{R}^n$ (središče), $r \in \mathbb{R}_0^+$ (polmer).

Kriterijska funkcija: $\max r$

Pogoji: $a_i^T s + r \|a_i\| \leq b_i$ (tj. $a_i^T (s + a_i \frac{r}{\|a_i\|}) \leq b_i$) in $r \geq 0$

b) Zveza med linearnim programom in njegovim dualom:

- Linearni program v standardni obliki:

Kriterijska funkcija: $\max c^T x$

Pri pogojih: $Ax \leq b$ in $x \geq 0$

- Dualni linearni program:

Kriterijska funkcija: $\min b^T y$

Pri pogojih: $A^T y \geq c$ in $y \geq 0$

Naša naloga v standardni obliki:

Spremenljivke $x = (r, s)$, kjer je $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$.

Ker ne velja $s \geq 0$, naredimo pretvorbo: $s = s' - s''$, pri čemer sta s' in $s'' \geq 0$ ($s_i = s'_i - s''_i$; s'_i in $s''_i \geq 0$).

Potem imamo $x = (r, s', s'')$. Vzamemo še $c = (1, 0, \dots, 0)$ in dobimo $c^T x = r$.

$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, $a_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ je vrstica

$$A = \begin{pmatrix} \|a_1\| & a_1^T & -a_1^T \\ \|a_2\| & a_2^T & -a_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \|a_m\| & a_m^T & -a_m^T \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} \|a_1\| & a_1^T & -a_1^T \\ \|a_2\| & a_2^T & -a_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \|a_m\| & a_m^T & -a_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s' \\ s'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|a_1\| r + a_1^T s' - a_1^T s'' \\ \|a_2\| r + a_2^T s' - a_2^T s'' \\ \vdots \\ \|a_m\| r + a_m^T s' - a_m^T s'' \end{pmatrix}$$

Dual naše naloge:

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} \|a_1\| & \|a_2\| & \dots & \|a_m\| \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_m \end{pmatrix}, \quad a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \text{ je stolpec}$$

Kriterijska funkcija: $\min b^T y \Rightarrow (b_1, b_2, \dots, b_m)^T (y_1, y_2, \dots, y_m) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$

Pri pogojih: $A^T y \geq c$ in $y \geq 0$

$$A^T y \geq c \Rightarrow \|a_1\| y_1 + \|a_2\| y_2 + \dots + \|a_m\| y_m \geq 1$$

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq 0$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq 0$$

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \leq 0$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \leq 0$$

Zadnjih 2m neenakosti, lahko združimo v m enakosti:

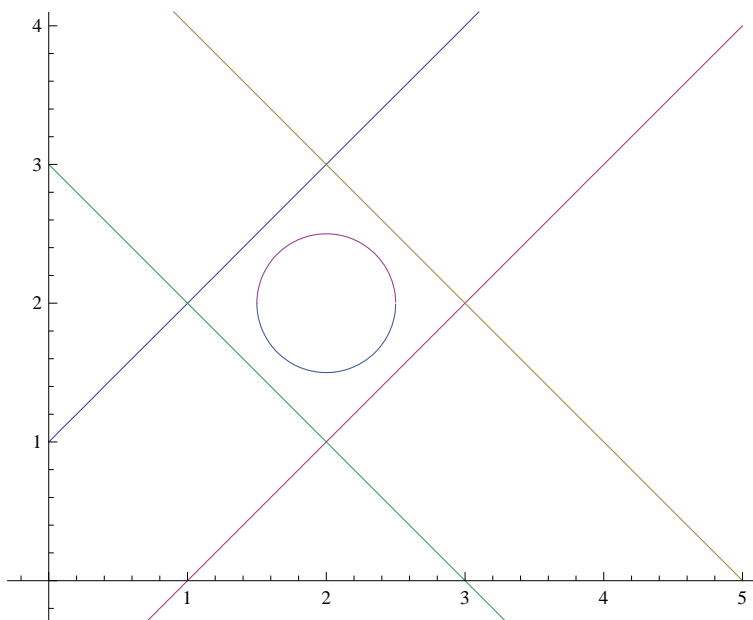
$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m = 0.$$

```
ClearAll[x]
```

```
Plot[{x + 1, x - 1, -x + 5, -x + 3, -Sqrt[1/4 - (x - 2)^2] + 2, Sqrt[1/4 - (x - 2)^2] + 2},
{x, 0, 5}, AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {{-0.3, 5.1}, {-0.3, 4.1}}]
```



Program

```

Needs["ComputationalGeometry`"]
ClearAll[x]

Krogla2[s_] :=
Module[
  {c, n, oglisca, a, da, b, pogoji},
  c = ConvexHull[s];
  n = Length[c];
  oglisca = Table[s[[c[[i]]]], {i, n}];
  a = Table[{-oglisca[[i-1, 2]] + oglisca[[i, 2]],
    oglisca[[i-1, 1]] - oglisca[[i, 1]]}, {i, 2, n}];
  a = Append[a, {-oglisca[[n, 2]] + oglisca[[1, 2]],
    oglisca[[n, 1]] - oglisca[[1, 1]]}];
  da = Map[Norm, a];
  b = Table[
    oglisca[[i, 2]] * (oglisca[[i-1, 1]] - oglisca[[i, 1]]) -
    oglisca[[i, 1]] * (oglisca[[i-1, 2]] - oglisca[[i, 2]]),
    {i, 2, n}
  ];
  b = Append[
    b,
    oglisca[[1, 2]] * (oglisca[[n, 1]] - oglisca[[1, 1]]) -
    oglisca[[1, 1]] * (oglisca[[n, 2]] - oglisca[[1, 2]])
  ];
  pogoji = Table[a[[i, 1]] * x + a[[i, 2]] * y + r * da[[i]] ≤ b[[i]], {i, n}];
  Maximize[Join[{r}, pogoji, {r ≥ 0}], {r, x, y}]
]

Narisi[t_, rez_] :=
Module[
  {c, n, oglisca, radij, sredisce},
  c = ConvexHull[t];
  n = Length[c];
  oglisca = Table[t[[c[[i]]]], {i, n}];
  radij = rez[[1]];
  sredisce = {x /. rez[[2]], y /. rez[[2]]};
  Graphics[{Line[Append[oglisca, oglisca[[1]]], Circle[sredisce, radij]]}
]

KroglaN[n_Integer?Positive, a_, b_] :=
Module[
  {m, da, pogoji},
  m = Length[b];
  s = Array[x, n];
  da = Map[Norm, a];
  pogoji = Table[a[[i]] . s + da[[i]] * r ≤ b[[i]], {i, m}];
  Maximize[Join[{r}, pogoji, {r ≥ 0}], Join[{r}, s]]
]

```

Primeri

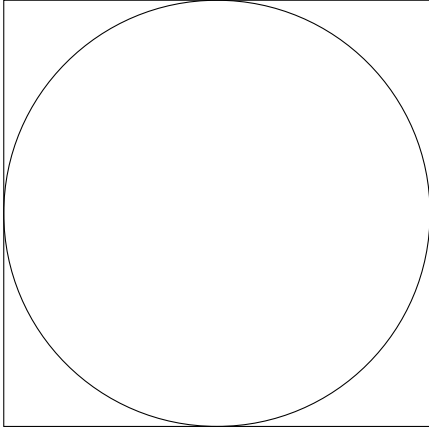
```
p1 = {{1, 1}, {1, 3}, {3, 3}, {3, 1}}
```

```
rez1 = Krogla2[p1]
```

```
Narisi[p1, rez1]
```

```
{{1, 1}, {1, 3}, {3, 3}, {3, 1}}
```

```
{1, {r -> 1, x -> 2, y -> 2}}
```



```
p2 = {{1, 1}, {6, 1}, {8, 3}, {4, 5}, {-1, 3}}
```

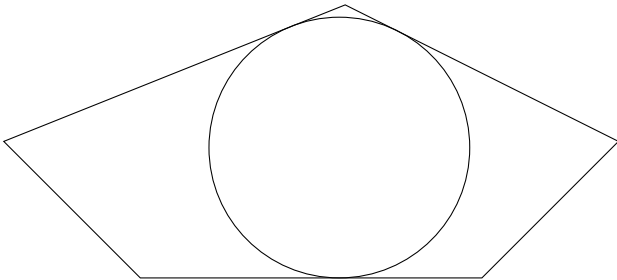
```
rez2 = Krogla2[p2]
```

```
Narisi[p2, rez2]
```

```
{{1, 1}, {6, 1}, {8, 3}, {4, 5}, {-1, 3}}
```

$$\left\{ \frac{36}{9 + 2\sqrt{5} + \sqrt{29}}, \right.$$

$$\left. \left\{ r \rightarrow \frac{36}{9 + 2\sqrt{5} + \sqrt{29}}, x \rightarrow 14 - \frac{36\sqrt{5}}{9 + 2\sqrt{5} + \sqrt{29}} - 2 \left(1 + \frac{36}{9 + 2\sqrt{5} + \sqrt{29}} \right), y \rightarrow 1 + \frac{36}{9 + 2\sqrt{5} + \sqrt{29}} \right\} \right\}$$



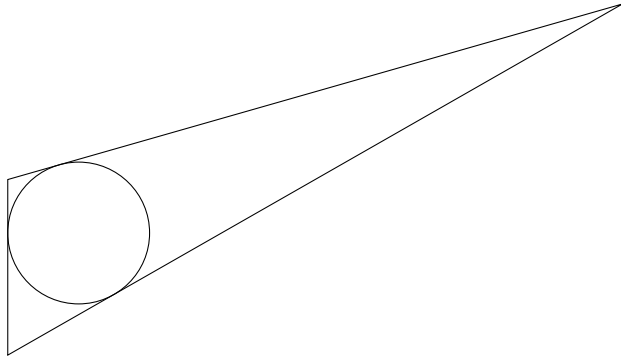
```
p3 = {{1, 1}, {1, 3}, {8, 5}}
```

```
rez3 = Krogla2[p3]
```

```
Narisi[p3, rez3]
```

```
{{1, 1}, {1, 3}, {8, 5}}
```

$$\left\{ \frac{14}{2 + \sqrt{53} + \sqrt{65}}, \left\{ r \rightarrow \frac{14}{2 + \sqrt{53} + \sqrt{65}}, x \rightarrow \frac{1}{2} \left(16 - \frac{14\sqrt{53}}{2 + \sqrt{53} + \sqrt{65}} - \frac{14\sqrt{65}}{2 + \sqrt{53} + \sqrt{65}} \right), \right. \right. \\ \left. \left. y \rightarrow \frac{1}{7} \left(3 + \frac{14\sqrt{65}}{2 + \sqrt{53} + \sqrt{65}} + 2 \left(16 - \frac{14\sqrt{53}}{2 + \sqrt{53} + \sqrt{65}} - \frac{14\sqrt{65}}{2 + \sqrt{53} + \sqrt{65}} \right) \right) \right\} \right\}$$



```
a = {{0, 1}, {0, -1}, {-1, 0}, {1, 0}}
```

```
b = {2, 0, 0, 2}
```

```
KroglaN[2, a, b]
```

```
{{0, 1}, {0, -1}, {-1, 0}, {1, 0}}
```

```
{2, 0, 0, 2}
```

```
{1, {r → 1, x[1] → 1, x[2] → 1}}
```

```
d = {{-1, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, -1, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, -1}, {0, 0, 1}}
```

```
e = {0, 2, 0, 2, 0, 2}
```

```
KroglaN[3, d, e]
```

```
{{-1, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, -1, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, -1}, {0, 0, 1}}
```

```
{0, 2, 0, 2, 0, 2}
```

```
{1, {r → 1, x[1] → 1, x[2] → 1, x[3] → 1}}
```

Razlaga

Naredil sem dva linearna programa Krogla2[s] in KroglaN[a,b] za izračun največje krogle v poliedru ter program Narisi[t,rez], ki za primere v ravnini vse skupaj še nariše.

KroglaN[a,b] sprejme matriko a in vektor b. V matriki a so po vrsticah podani vektorji a_i , v vektorju b pa vrednosti b_i , ki nastopajo v začetni nalogi. Med primeri so podane matrike in vektorji, ki omejujejo kvadrat in kocko z ogliščem v izhodišču in stranico dolžine 2.

Krogla2[s] sprejme seznam s, ki predstavlja točke v ravnini. S pomočjo vgrajene funkcije ConvexHull[s] najprej izračuna konveksno ogrinjačo teh točk ter jo vrne kot seznam točk, ki so v ravnini razporejene v nasprotni smeri urinega kazalca. Sedaj lahko skozi poljubni zaporedni točki tega seznama potegnemo premico, ki nam omejuje polieder, v katerega bi radi včrtali krog. Zato s pomočjo vseh zaporednih parov izrazimo a_i in b_i , kot jih imamo v začetni nalogi, in rešimo linearni program.