OSNOVNE DEFINICIJE IN PRIMERI

Optimizacijska naloga je trojka $(\mathcal{D}, f, opt)$, kjer je:

- $\mathcal{D}$ ... množica dopustnih rešitev (feasible solutions)
- $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ kriterijska (tudi namenska, ciljna) funkcija (objective function)

  včasih $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
- $opt \in \{min, max\}$ vrsta naloge

  minimizacija ali maksimizacija

Običajno iščemo optimalno rešitev:

$x^* \in \mathcal{D}$ je optimalna rešitev, če za vsak $y \in \mathcal{D}$ velja:

$opt = min$: $f(x^*) \leq f(y)$ globalni minimum

$opt = max$: $f(x^*) \geq f(y)$ globalni maksimum

Lahko pa iščemo tudi:

- vse optimalne rešitve
- samo optimalno vrednost, tj. $f(x)$, kjer je x optimalna rešitev
- čim boljši približek za optimalno rešitev oz. optimalno vrednost

Optimizacijski problem: izraz, ki ga uporabljamo, da opišemo skupek optimizacijskih nalog istega tipa (to je "način govorjenja", ne matematična definicija)

Množica $\mathcal{D}$ je pogosto podana posredno:

$$\mathcal{D} = \{ x \in \Omega \mid x \text{ izpolnjuje pogoje} \}.$$

tem elementom pogosto pravimo rešitve, elementi iz $\mathcal{D}$ pa so dopustne rešitve

Opis Ω je tipično preprost, opis $\mathcal{D}$ pa bolj zapleten.

Zgled 1.

$\max\ xy^2z$

pri pogojih

$x + y + z^2 = 100$

$x, y, z \geq 0$

Tu lahko vzamemo $\Omega = \mathbb{R}^3$, za $\mathcal{D}$ pa imamo potem zgornji pogoje.

Zgled 2.

Postavitev n šahovskih kraljic na šahovnico velikosti $n \times n$ tako, da se nobeni dve ne napadata.

Formulacija, prilagojena razmišljanju računalniškega programerja.

$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}^n$ vektorji dolžine n, katerih komponente so števila od 1 do n

Elementi iz Ω opisujejo postavitve kraljic, kjer je v vsakem stolpcu natanko ena kraljica: i-ta komponenta pove, v kateri vrstici je kraljica v stolpcu i.

Pogoji: $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ (so v različnih vrsticah)

$x_j - x_i \neq j - i$ za $1 \leq i < j \leq n$ (ne napadajo po "naraščajočih" diagonalah)

$x_j - x_i \neq i - j$ za $1 \leq i < j \leq n$ (ne napadajo po "padajočih" diagonalah)

Kriterijska funkcija je npr. kar konstanta 0.

Pri reševanju optimizacijske naloge lahko naletimo (vsaj) na naslednje situacije:

- dobimo <u>optimalno rešitev</u>
- naloga <u>ni dopustna</u> (tudi <u>je protislovna</u>)

  Ugotovimo, da je $D = \emptyset$.

  To pogosto iz opisa naloge ni neposredno razvidno.

<u>Zgled 1</u>

Naloga je dopustna, npr. $x = y = 0$, $z = 10$.

Teorija pove, da obstaja celo optimalna rešitev: "zvezna funkcija na kompaktni množici doseže minimum in maksimum".

zaprta in omejena v $\mathbb{R}^n$

Izrek.

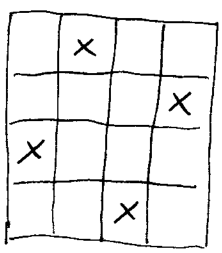
Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zaprta in omejena, $f : D \to \mathbb{R}$ pa zvezna funkcija. Potem obstajata globalni minimum in globalni maksimum za f na D.

<u>Zgled 2</u>

Za $n = 2, 3$ je naloga protislovna.

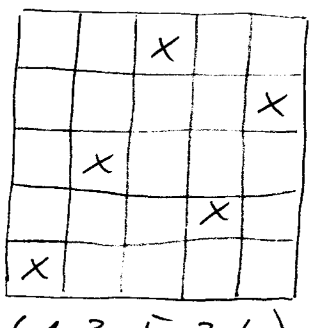
Izkaže se, da za $n = 1$ in $n \geq 4$ vedno obstaja dopustna rešitev.

$n=4$



$(2, 4, 1, 3)$

$n=5$



$(1, 3, 5, 2, 4)$

Smiselno je tudi iskanje vseh dopustnih rešitev. Npr. za $n = 8$ jih je 92.

— naloga je <u>neomejena</u>

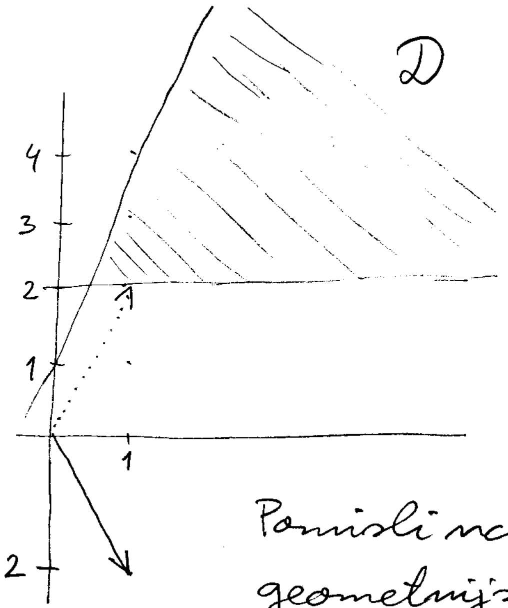
Kriterijska funkcija je navzgor neomejena (pri opt=max) oz. navzdol neomejena (pri opt=min) na množici dopustnih rešitev.

<u>Zgled.</u>

$$\min\ x - 2y$$

p.p.

$$y \le 3x+1$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 2$$



Naloga je neomejena: vstavimo npr. $x=y$ za $x \to \infty$ (je dopustno, vrednost gre proti $-\infty$).

Pomisli na geometrijski pomen: skalarni produkt ...

Če kriterijsko funkcijo spremenimo v $x+2y$, naloga ni več neomejena. Množica dopustnih rešitev je še vedno neomejena (kot prej).

Neomejenost optimizacijske naloge je odvisna od $\mathcal{D}$, f in opt.

<u>Opomba.</u>

$$(\mathcal{D}, f, \max) \simeq (\mathcal{D}, -f, \min)$$

(Opomba. Lahko se spremeni "narava" funkcije f.)

Optimalne rešitve so enake pri obeh nalogah. Optimalna vrednost spremeni predznak.

$$f(x^*) \ge f(x)\ \forall x \in \mathcal{D} \iff (-f)(x^*) \le (-f)(x)\ \forall x \in \mathcal{D}$$

– naloga je omejena, a nima optimalne rešitve

Naj bo opt = max (analogno je tudi za opt = min).
Obstaja torej tak $M \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \leq M$ za $\forall x \in \mathcal{D}$,
ni pa ekta $x \in \mathcal{D}$, ki bi bil globalni maksimum.

V takem primeru obstaja $\sup_{x \in \mathcal{D}} f(x)$ (množica $f(\mathcal{D})$ je navzgor omejena podmnožica realnih števil, zato ima natančno zgornjo mejo), ki ni dosežen, a se mu z dopustnimi rešitvami lahko poljubno približamo.

Zgledi

- $\max \{ x^2 \mid 0 \leq x < 1 \}$ maksimum bi bil pri 1, a tam interval ni zaprt
- $\min \{ e^{1/x} \mid x \geq 1 \}$ začne pri e in pada proti 1
- Iščemo celoštevilsko točko v notranjosti prvega kvadranta, ki bo čim bližje premici $y = \sqrt{2}\, x$.

  $\mathcal{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x > 0,\ y > 0 \}$ Nobena od teh ne leži na premici, saj $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

  $f((x,y)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| -\sqrt{2}x + y \right|$ } izpelji preko rotacije, skalarnega produkta itd.

  Iščemo minimum.

  Kriterijska fnc je nenegativna in se ničli polj. približa, a je na $\mathcal{D}$ ne doseže (gledamo $\sqrt{2}n - \lfloor \sqrt{2}n \rfloor$ za $n = 1, 2, \ldots$).

matematično programiranje

mathematical programming

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ običajno odprta

$f, g_1, \dots, g_m : \Omega \to \mathbb{R}$ običajno vsaj zvezne

lahko definirana samo na $\mathcal{D}$

Matematični program je naslednja opt. naloga:

$$\max/\min \ f(x)$$

p.p.

$$g_i(x) \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} 0 \quad \text{za } i = 1, \dots, m$$

pogoji, ki določajo $\mathcal{D}$

ni strogih neenakosti

Splošne pretvorbe:

- zamenjava $\leq$ in $\geq$: množenje z -1
- enačaj v neenačaj:

$$J_1 = J_2 \iff J_1 \leq J_2 \text{ in } J_1 \geq J_2$$

$$(-J_1 \leq -J_2)$$

- neenačaj v "enačaj":

$$J_1 \leq J_2 \iff J_1 + s = J_2 \text{ in } s \geq 0$$

Vpeljemo novo (dopolnilno) spremenljivko in zahtevamo, da je nenegativna

(slack variable)

konveksno programiranje

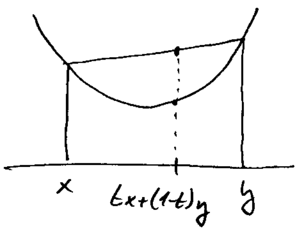
convex programming

Posebna vrsta matematičnih programov:

min

$\mathcal{D}$ konveksna $\qquad x, y \in \mathcal{D},\ t \in [0,1] \Rightarrow tx+(1-t)y \in \mathcal{D}$

f konveksna $\qquad$ definicijsko območje je konveksno in velja: $x, y \in \mathcal{D}, t \in [0,1]$



$$f(tx+(1-t)y) \leq t \cdot f(x) + (1-t) f(y)$$

Zgled. x^2

Kriteriji: drugi odvod ≥ 0 oz. Hessejeva mtr poz. semidef.

Trditev.

Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna in $g_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, konveksne funkcije. Potem je množica

$$\mathcal{D} = \{ x \in \Omega \mid g_i(x) \leq 0 \text{ za } i = 1, \dots, m \}$$

tudi konveksna.

Dokaz.

Vzemimo $x, y \in \mathcal{D}$ in $t \in [0,1]$. Izberimo $i \in \{1, \dots, m\}$ poljubno. Potem je

$$g_i(\underbrace{tx+(1-t)y}_{\in \Omega \text{ konv}}) \underset{g_i \text{ konv.}}{\leq} \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{g_i(x)}_{\substack{\leq 0 \\ \text{ker } x \in \mathcal{D}}} + \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \underbrace{g_i(y)}_{\substack{\leq 0 \\ \text{ker } y \in \mathcal{D}}} \leq 0.$$

Torej $tx+(1-t)y \in \mathcal{D}$. $\square$

Opomba.

f konkavna $\Longleftrightarrow$ $-f$ konveksna

Konveksni programi imajo nekatere lepe lastnosti:

- vsak lokalni minimum je tudi globalni
- teoretično dobro raziskani   npr. dualnost
- lahko "učinkovito" numerično rešimo   dokazljive meje
- pogosto pojavijo v praksi

linearno programiranje   linear programming

Posebna vrsta konveksnih programov:

$\Omega = \mathbb{R}^n$

$f, g_1, \dots, g_m$ so afine funkcije

so in konveksne in konkavne

Standardna oblika:

$$\max \ c^T x \qquad c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
$$\text{p.p.} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

po komponentah

celoštevilsko programiranje   integer programming

Kot matematični programi; dodatno zahtevamo še $x \in \mathbb{Z}^n$.