# KONVEKSNE MNOŽICE

Naj bo $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. S $\mathrm{cl}(\mathcal{D})$ označimo *zaprtje*, z $\mathrm{int}(\mathcal{D})$ pa *notranjost* množice $\mathcal{D}$ v $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1 *Množica $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ je* konveksna*, če za vsaka $x, y \in \mathcal{D}$ in vsak $\lambda \in [0,1]$ velja $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{D}$.*

Vsakemu vektorju $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, kjer je $\lambda_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, pravimo *konveksna kombinacija* vektorjev $x_i \in \mathbb{R}^n$. (Če pogoje nenegativnosti za skalarje $\lambda_i$ izpustimo, dobimo *afine kombinacije*.) Vsaka konveksna množica vsebuje vse konveksne kombinacije svojih elementov.

Presek poljubne družine konveksnih množic je spet konveksna množica (prazna množica je po definiciji konveksna; res pa je, da pri trditvah pogosto "po tiho" predpostavimo, da so konveksne množice neprazne).

*Konveksna ovojnica* (ali *konveksna ogrinjača*) $\mathrm{conv}(\mathcal{D})$ množice $\mathcal{D}$ je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje $\mathcal{D}$. To je ravno presek vseh konveksnih množic, ki vsebujejo $\mathcal{D}$, oziroma množica vseh konveksnih kombinacij točk iz $\mathcal{D}$. Množica je konveksna natanko tedaj, ko je enaka svoji konveksni ovojnici. Za kompaktne (tj. zaprte in omejene v $\mathbb{R}^n$) množice je tudi njihova konveksna ovojnica kompaktna. Za odprte množice je njihova konveksna ovojnica odprta množica. Za zaprte množice taka trditev ne velja. Zaprta konveksna množica je enaka preseku vseh zaprtih polprostorov, ki jo vsebujejo.

Če je množica $\mathcal{D}$ konveksna, sta konveksni tudi množici $\mathrm{cl}(\mathcal{D})$ in $\mathrm{int}(\mathcal{D})$ (seveda je notranjost neprazne množice lahko prazna).

Trditev 2 *Naj bo $\mathcal{D}$ konveksna množica z $\mathrm{int}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ ter $x_1 \in \mathrm{int}(\mathcal{D})$ in $x_2 \in \mathrm{cl}(\mathcal{D})$. Potem polodprta daljica $[x_1, x_2)$ v celoti leži v $\mathrm{int}(\mathcal{D})$.*

Posledica 3 *Naj bo $\mathcal{D}$ konveksna množica z $\mathrm{int}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$. Potem je*

$$\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathcal{D})) = \mathrm{cl}(\mathcal{D}) \qquad \textit{in} \qquad \mathrm{int}(\mathcal{D}) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathcal{D}))\,.$$

Formuli iz posledice ne držita nujno za nekonveksne množice.

Izrek 4 **(Carathéodoryjev izrek)** *Naj bo $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $x \in \mathrm{conv}(\mathcal{D})$. Potem lahko $x$ zapišemo kot konveksno kombinacijo $n+1$ (ne nujno različnih) točk iz $\mathcal{D}$.*

Definicija 5 *Naj bo $\mathcal{D}$ konveksna množica. Točka $x \in \mathcal{D}$ je* ekstremna točka *množice $\mathcal{D}$, če je množica $\mathcal{D} \setminus \{x\}$ konveksna.*

Drugače povedano, točka je ekstremna natanko tedaj, ko je ni moč zapisati v obliki $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, kjer $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$, $x_1 \neq x_2$ in $0 < \lambda < 1$. V splošnem konveksna množica lahko nima nobene ekstremne točke. To se lahko zgodi tudi pri zaprtih konveksnih množicah. Velja pa, da ima vsaka kompaktna konveksna množica kakšno ekstremno točko. Nobena ekstremna točka ne leži v notranjosti množice $\mathcal{D}$.

Izrek 6 *Naj bo $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktna konveksna množica in $\mathcal{E}$ množica njenih ekstremnih točk. Potem je*

$$\mathcal{D} = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(\mathcal{E}))\,.$$

Izrek 6 velja tudi za tako imenovane lokalno konveksne topološke vektorske prostore in ne le za $\mathbb{R}^n$. V tej splošni obliki mu pravimo **Krein-Milmanov izrek**.

V $\mathbb{R}^n$ je moč izrek 6 še izboljšati, in sicer velja

$$\mathcal{D} = \mathrm{conv}(\mathcal{E})\,.$$

Na konveksno množico $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ pogosto ne gledamo kot na množico v $\mathbb{R}^n$, ampak raje kot na podmnožico njene afine ovojnice. Ta ovojnica je v bistvu spet prostor $\mathbb{R}^d$, kjer je $d \leq n$. Število $d$ je tedaj *razsežnost* (oz. *dimenzija*) množice $\mathcal{D}$. Znotraj svoje afine ovojnice ima vsaka konveksna množica neprazno notranjost (pravimo ji *relativna notranjost* in jo označimo z $\mathrm{ri}(\mathcal{D})$). Tako lahko posplošimo mnoge trditve, pri katerih smo zahtevali neprazno notranjost množice, pri čemer $\mathrm{int}(\mathcal{D})$ zamenjamo z $\mathrm{ri}(\mathcal{D})$. Primera sta trditev 2 in posledica 3, v izreku 4 pa lahko $n+1$ nadomestimo z $d+1$.

DEFINICIJA 7 *Naj bosta $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \subseteq \mathbb{R}^n$. Hiperravnina* $\Pi$ loči *množici $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$, če sta $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ podmnožici različnih odprtih polprostorov, ki ju določa* $\Pi$.

*Hiperravnina* $\Pi$ krepko loči *$\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$, če loči $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$, hkrati pa obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je vsaka točka iz $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ oddaljena vsaj $\varepsilon$ od* $\Pi$.

*Hiperravnina* $\Pi$ šibko loči *$\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$, če sta $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ podmnožici različnih zaprtih polprostorov, ki ju določa $\Pi$, in velja $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}' \nsubseteq \Pi$.*

Za vsako zaprto konveksno množico $\mathcal{D}$ in točko $x \notin \mathcal{D}$ obstaja hiperravnina, ki krepko loči $x$ in $\mathcal{D}$. V $\mathcal{D}$ tudi obstaja natanko ena točka, ki je najbližja $x$ (pri konveksnih množicah, ki niso zaprte, se lahko zgodi, da najbližja točka v $\mathcal{D}$ ne obstaja, nikoli pa ne more biti več kot ena sama).

IZREK 8 *Naj bosta $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ taki konveksni množici v $\mathbb{R}^n$, da je $\mathrm{int}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ in $\mathrm{int}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}' = \emptyset$. Potem obstaja hiperravnina, ki šibko loči $\mathrm{cl}(\mathcal{D})$ in $\mathrm{cl}(\mathcal{D}')$.*

Izrek 8 velja tudi v neskončno razsežnih prostorih, v $\mathbb{R}^n$ pa ga je moč izboljšati. Opomba: v $\mathbb{R}^n$ sta enakovredni trditvi, da lahko šibko ločimo množici in da lahko šibko ločimo njuni zaprtji.

IZREK 9 *Naj bosta $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ konveksni množici v $\mathbb{R}^n$. Množici $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ lahko šibko ločimo natanko tedaj, ko je $\mathrm{ri}(\mathcal{D}) \cap \mathrm{ri}(\mathcal{D}') = \emptyset$.*

V izrekih 8 in 9 ni moč doseči ločitve množic $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$.

IZREK 10 *Naj bosta $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ taki zaprti konveksni množici v $\mathbb{R}^n$, da je $\mathcal{D}$ kompaktna in $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$. Potem obstaja hiperravnina, ki krepko loči $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$.*

Če v izreku 10 izpustimo zahtevo po kompaktnosti množice $\mathcal{D}$, izrek ni več resničen.