

Poliedri

Ines Pogačar

27. oktober 2009, 5. november 2009 (popravek)

Pri linearnem programiranju imamo opravka s končnim sistemom neenakosti in končno spremenljivkami, torej je množica dopustnih rešitev presek končno mnogo zaprtih polprostorov.

Definicija 1 *Množica rešitev linearne neenakosti*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b,$$

kjer je vsaj en koeficient a_i neničeln, je (zaprt) **polprostor** v \mathbb{R}^n .

Definicija 2 *Konveksni polieder* v \mathbb{R}^n je množica oblike

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

za neko matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in neki vektor $b \in \mathbb{R}^m$, oziroma je presek končno mnogo zaprtih polprostorov. Omejenemu konveksnemu poliedru pravimo tudi konveksni **politop**.

Množica dopustnih rešitev pri linearnem programu je torej konveksni polieder. Vsak polprostor je konveksen, zato je množica iz zgornje definicije res konveksna.

V nadaljevanju se bo vse nanašalo na konveksne poliedre, zato bomo pridevnik "konveksen" izpuščali.

Dimenzija poliedra P je najmanjša dimenzija afnega podprostora, ki vsebuje P . Polieder $P \subset \mathbb{R}^n$ je dimenzije n natanko tedaj, ko nima prazne notranjosti.

Definicija 3 *Naj bo $P = \{x : Ax \leq b\}$ neprazen polieder. Če je c vektor, za katerega je vrednost $\delta = \max\{c^T x : x \in P\}$ končna, potem množici $\{x : c^T x = \delta\}$ pravimo **oporna hiperravnina** poliedra P .*

Lice $F \subseteq P$ je polieder sam ali pa presek P z neko oporno hiperravnino.

Točka $x \in P$ je **oglišče** poliedra P , če je $\{x\}$ lice.

V konveksnem poliedru je pojem ekstremne točke ekvivalenten oglišču.

Iz definicije lica sledi, da je tudi samo lice (konveksni) polieder. Polieder $P \subset \mathbb{R}^n$ ima lahko lica (ki niso P) dimenzije manjše od n .

Trditev 1 Naj bo $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ polieder in $F \subseteq P$. Potem so naslednje trditve ekvivalentne:

- (a) F je lice poliedra P .
- (b) Obstaja vektor c , da je $\delta = \max\{c^T x : x \in P\}$ končna in $F = \{x \in P : c^T x = \delta\}$.
- (c) $F = \{x \in P : A'x = b'\} \neq \emptyset$ za kak podsistem $A'x \leq b'$ sistema $Ax \leq b$.

Dokaz: (a) \Rightarrow (b): Očitno po definiciji.

(c) \Rightarrow (b): Če je $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ neprazna, naj bo c vsota vrstic matrike A' in δ vsota komponent vektorja b' . Po kratkem izračunu opazimo, da za vsak $x \in P$ velja $c^T x \leq \delta$ in $F = \{x \in P : c^T x = \delta\}$.

(b) \Rightarrow (c): Privzamemo točko (c). Naj bo $A'x \leq b'$ maksimalni podsistem sistema $Ax \leq b$, da velja $A'x = b'$ za vsak $x \in F$ in $A''x \leq b''$ ostanek sistema $Ax \leq b$. Dokazati moramo, da $A'x = b'$ velja le za $x \in F$.

Opazimo, da za vsako neenakost $a''_i x \leq \beta''_i$ sistema $A''x \leq b''$ ($i = 1, \dots, k$) obstaja točka $x_i \in F$, ki zadošča strogi neenakosti $a''_i x < \beta''_i$, saj bi sicer za vse točke iz F veljala enakost $a''_i x = \beta''_i$, kar pa je v protislovju s tem, da je $A'x \leq b'$ maksimalen.

Definirajmo $x^* := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$, ki je težišče teh točk. Potem je lahko videti, da je $x^* \in F$ in $a''_i x^* < \beta''_i$ za vsak $i \in \{1, \dots, k\}$.

Vzemimo $y \in P \setminus F$. Potem je $c^T y < \delta$. Definirajmo $z := x^* + \varepsilon(x^* - y)$ za nek majhen $\varepsilon > 0$, konkretno, naj bo manjši od $\frac{\beta''_i - a''_i x^*}{a''_i(x^* - y)}$ za vsak tak $i \in \{1, \dots, k\}$, da je $a''_i x^* > a''_i y$. Ker sta $c^T x^* - c^T y$ in ε pozitivna, je

$$c^T z = c^T x^* + \varepsilon(c^T x^* - c^T y) > \delta,$$

in sledi, da $z \notin P$. Potem obstaja neenakost sistema $Ax \leq b$, da velja $a^T z > \beta$, oziroma

$$a^T x^* + \varepsilon(a^T x^* - a^T y) > \beta,$$

kar pomeni, da mora biti $a^T x^* > a^T y$. Ta neenakost ne more pripadati sistemu $A''x \leq b''$, sicer bi za zgornjo mejo števila ε vzeli $\frac{\beta - a^T x^*}{a^T(x^* - y)}$:

$$a^T z = a^T x^* + \varepsilon(a^T x^* - a^T y) < a^T x^* + \frac{\beta - a^T x^*}{a^T(x^* - y)} a^T(x^* - y) = \beta.$$

Torej neenakost pripada $A'x \leq b'$.

Ker je $a^T x^* - a^T z$ negativno in $\frac{1}{\varepsilon}$ pozitivno, je

$$a^T y = a^T x^* + \frac{1}{\varepsilon}(a^T x^* - a^T z) < \beta.$$

Dokazali smo, da za vsak $y \in P \setminus F$ obstaja neenakost sistema $A'x \leq b'$, da velja neenakost $a^T y < \beta$, torej $A'y \neq b'$. \square

Relacija “je lice” je tranzitivna:

Posledica 1 Naj bo P polieder in F njegovo lice. Potem je F spet polieder in množica $F' \subseteq F$ je lice poliedra P , če in samo če je lice poliedra F .

Definicija 4 Naj bo P polieder. **Glavno lice** poliedra P dimenzije n je lice največje dimenzije, ki ni cel P , torej dimenzije $n - 1$.

Pravimo, da neenakost $c^T x \leq \delta$ **določa** glavno lice, če je $c^T x \leq \delta$ za vsak $x \in P$ in je $\{x \in P : c^T x = \delta\}$ maksimalno lice poliedra P .

Trditev 2 Naj bo $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ neprazen polieder dimenzije $n - \text{rang}(A)$. Naj bo $A'x \leq b'$ minimalen sistem neenakosti, da $P = \{x : Ax = b, A'x \leq b'\}$. Potem vsaka neenakost sistema $A'x \leq b'$ definira neko glavno lice in vsako glavno lice je določeno z neko neenakostjo sistema $A'x \leq b'$.

Dokaz: Če je $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, nima glavnih lic in trditev velja.

Naj bo $A'x \leq b'$ minimalen sistem neenakosti, da $P = \{x : Ax = b, A'x \leq b'\}$, $a^T x \leq \beta'$ ena od teh neenakosti in $A''x \leq b''$ preostanek sistema $A'x \leq b'$. Vzemimo tak vektor y , da velja $Ay = b$, $A''y \leq b''$ in $a^T y > \beta'$. Tak vektor obstaja, ker neenakost $a^T x \leq \beta'$ ni odvečna v sistemu. Naj bo $x \in P$ tak, da $a^T x < \beta'$. Definirajmo $z := x + \frac{\beta' - a^T x}{a^T y - a^T x}(y - x)$. Velja, da $a^T z = \beta'$, torej leži v hiperravnini, ki se poliedra dotika v F .

Pokazati moramo še, da $z \in P$, to je, da zadošča še ostalim neenakostim, torej sistemu $A''x \leq b''$:

$$\begin{aligned} A''z &= \left(1 - \frac{\beta' - a^T x}{a^T y - a^T x}\right)A''x + \frac{\beta' - a^T x}{a^T y - a^T x}A''y \\ &\leq \left(1 - \frac{\beta' - a^T x}{a^T y - a^T x}\right)b'' + \frac{\beta' - a^T x}{a^T y - a^T x}b'' = b''. \end{aligned}$$

Res velja, ker $0 < \frac{\beta' - a^T x}{a^T y - a^T x} < 1$.

Tako je $F := \{x \in P : a^T x = \beta'\} \neq \emptyset$ lice dimenzije $\dim(P) - 1$ in $F \neq P$, ker $x \in P \setminus F$, torej je glavno lice.

Iz trditve 1 sledi, da je vsako glavno lice določeno z neko neenakostjo sistema $A'x \leq b'$. \square

Še en pomemben razred lic v poliedru so minimalna lica.

Definicija 5 *Minimalna so lica, ki ne vsebujejo drugih lic.*

Trditev 3 *Naj bo $P = \{x \in \mathbb{R} : Ax \leq b\}$ polieder. Neprazna podmnožica $F \subseteq P$ je minimalno lice poliedra P natanko tedaj, ko je $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b'\}$ za kak podsistem $A'x \leq b'$ sistema $Ax \leq b$.*

Dokaz: \Rightarrow : Če je F minimalno lice poliedra P , po trditvi 1 obstaja podsistem $A'x \leq b'$ sistema $Ax \leq b$, da je $F = \{x \in P : A'x = b'\}$. Izberimo $A'x \leq b'$ maksimalen. Naj bo $A''x \leq b''$ minimalen podsistem $Ax \leq b$, da je $F = \{x : A'x = b', A''x \leq b''\}$. Radi bi dokazali, da $A''x \leq b''$ ne vsebuje nobene neenakosti.

Pa privzemimo nasprotno: naj bo $a''x \leq \beta''$ neenakost iz sistema $A''x \leq b''$. Ker ni odvečna za opis množice F , je po trditvi 2 množica $F' := \{x : A'x = b', A''x \leq b'', a''x = \beta''\}$ maksimalno lice poliedra F , definirano z neenakostjo $a''x \leq \beta''$. Po pravilu tranzitivnosti je F' tudi lice poliedra P , kar je v nasprotju s tem, da je F minimalno.

\Leftarrow : Bodi $F = \{x : A'x = b'\} \subseteq P$ za nek podsistem $A'x \leq b'$ sistema $Ax \leq b$. Po trditvi 1 je F lice P . Očitno F nima drugih lic razen sebe, torej je minimalno. \square

Posledica 2 *Za polieder $P = \{x : Ax \leq b\}$ so vsa minimalna lica dimenzije $n - \text{rang}(A)$. Pri politopih so to natanko oglišča.*

Bazne rešitve

Pri reševanju linearnega problema

$$\max c^T x, \quad \text{pri pogojih} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

z metodo simpleksov po uvedbi dopolnilnih spremenljivk za vsak slovar dobimo sistem $[A \ I]x = b$, kjer je $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m+n})^T$ in matrika $[A \ I]$ velikosti $m \times (n + m)$.

Definicija 6 *Naj bo $B \subseteq \{1, 2, \dots, m + n\}$ moči m . Označimo z A_B $m \times m$ podmatriko matrike $[A \ I]$, sestavljeno iz stolpcev iz B . Spremenljivke, indeksirane z elementi množice B , tvorijo **bazo**, če je A_B obrnljiva.*

Dopustna bazna rešitev je dopustna rešitev x , za katero obstaja baza B , da so $x_i = 0$ za vse $i \in N := \{1, 2, \dots, m + n\} \setminus B$.

Trditev 4 Naj bo $x \in P$, kjer je P množica dopustnih rešitev linearnega programa

$$\max c^T x, \quad \text{pri pogojih} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Potem je x oglišče poliedra P natanko tedaj, ko je dopustna bazna rešitev.

Dokaz: Naj bo x dopustna bazna rešitev. Potem obstaja baza B , da so $x_i = 0$ za vsak $i \in N$. Če je $x_i = 0$, kjer je $i \in N$, dopolnilna, nam to pove, da v neki neenakosti sistema $Ax \leq b$ velja enakost, če pa je originalna spremenljivka, pa to pomeni, da enakost velja v neki neenakosti pogoja $x \geq 0$. Torej imamo v skupnem sistemu

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

n neenakosti z n spremenljivkami, ki zadoščajo enakostim. Po trditvi 3 je $\{x\}$ minimalno lice, ki je po posledici 2 dimenzije 0, torej je x oglišče.

Naj bo sedaj x oglišče, ki ima k neničelnih komponent. V bazo damo tiste spremenljivke, ki so v vektorju x neničelne. Ker je matrika $[A \ I]$ ranga m , lahko bazi dodamo še $m - k$ spremenljivk tako, da bodo stolpci neodvisni. To bo dopustna baza. Pripadajočo dopustno bazno rešitev dobimo, če postavimo dodane spremenljivke na 0. \square

Literatura

- [1] B. H. Korte, J. Vygen: *Combinatorial optimization: Theory and Algorithms*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2006
- [2] G. B. Dantzig, M. N. Thapa: *Linear Programming: Theory and extensions*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1997
- [3] J. Matoušek, B. Gärtner: *Understanding and using linear programming*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2007