Poliedri

Ines Pogačar

27. oktober 2009

Pri linearnem programiranju imamo opravka s končnim sistemom neenakosti in končno spremenljivkami, torej je množica dopustnih rešitev presek končno mnogo polprostorov.

Definicija 1 *Množica rešitev linearne neenakosti*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b,$$

kjer je vsaj en koeficient a_i neničeln, je (zaprt) ***polprostor*** *v $\mathbb{R}^n$.*

Definicija 2 ***Konveksni polieder*** *v $\mathbb{R}^n$ je množica oblike*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

za neko matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in nek vektor $b \in \mathbb{R}^m$, oziroma je presek končno mnogo zaprtih polprostorov. Omejenemu konveksnemu poliederu pravimo tudi konveksni ***politop****.*

Množica dopustnih rešitev pri linearnem programu je torej konveksni polieder. Vsak polprostor je konveksen, zato je množica iz zgornje definicije res konveksna.

V nadaljevanju se bo vse nanašalo na konveksne poliedre, zato bomo pridevnik "konveksen" izpuščali.

Dimenzija poliedra P je najmanjša dimenzija podprostora, ki vsebuje P. $P \subset \mathbb{R}^n$ je dimenzije n natanko tedaj, ko nima prazne notranjosti.

Definicija 3 *Naj bo $P = \{x : Ax \leq b\}$ neprazen polieder. Če je c vektor, za katerega je množica $\delta = \max\{cx : x \in P\}$ končna, potem množici $\{x : cx = \delta\}$ pravimo* ***podpirajoča hiperravnina*** *poliedra P.*
Lice *$F \subseteq P$ je polieder sam, ali pa presek P z neko podpirajočo hiperravnino. Točka $x \in P$ je* ***oglišče*** *poliedra P, če je $\{x\}$ lice.*

Iz definicije lica sledi, da je tudi samo lice (konveksni) polieder. Polieder $P \subset \mathbb{R}^n$ ima lahko lica (ki niso P) dimenzije manjše od n.

Tridtev 1 *Naj bo $P = \{x : Ax \leq b\}$ polieder in $F \subseteq P$. Potem so naslednje trditve ekvivalentne:*

(a) F je lice poliedra P.

(b) Obstaja vektor c, da je množica $\delta = \max\{cx : x \in P\}$ končna in $F = \{x \in P : cx = \delta\}$.

(c) $F = \{x \in P : A'x = b'\} \neq \emptyset$ za nek podsistem $A'x \leq b'$ sistema $Ax \leq b$.

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$: očitno po definiciji.

$(c) \Rightarrow (b)$: Če je $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ neprazna, naj bo c vsota vrstic matrike A' in δ vsota komponent vektorja b'. Po kratkem izračunu opazimo, da je za vsak $x \in P$ $cx \leq \delta$ in $F = \{x \in P : cx = \delta\}$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Privzamemo točko (c). Naj bo $A'x \leq b'$ maksimalni podsistem sistema $Ax \leq b$, da velja $A'x = b'$ za vsak $x \in F$, in $A''x \leq b''$ ostanek sistema $Ax \leq b$. Dokazati moramo, da $A'x = b'$ velja le za $x \in F$.

Opazimo, da za vsako neenakost $a''_i x \leq \beta''_i$ sistema $A''x \leq b''$ $(i = 1, \dots, k)$ obstaja točka $x_i \in F$, ki zadošča strogi neenakosti $a''_i x < \beta''_i$, saj bi sicer za vse točke iz F veljala enakost $a''_i x = \beta''_i$, kar pa je v protislovju s tem, da je $A'x \leq b'$ maksimalen.

Definirajmo $x^* := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$, ki je težišče teh točk. Potem je lahko videti, da je $x^* \in F$ in $a''_i x^* \leq \beta''_i$ za vsak $i \in \{1, \dots, k\}$.

Vzemimo $y \in P \setminus F$. Potem je $cy < \delta$. Definirajmo $z := x^* + \epsilon(x^* - y)$ za nek majhen $\epsilon > 0$, konkretno, naj bo manjši od $\frac{\beta''_i - a''_i x^*}{a''_i(x^* - y)}$ za vsak tak $i \in \{1, \dots, k\}$, da je $a''_i x^* > a''_i y$. Ker sta $cx^* - cy$ in ϵ pozitivna, je

$$cz = cx^* + \epsilon(cx^* - cy) > \delta,$$

in sledi, da $z \notin P$. Potem obstaja neenakost sistema $Ax \leq b$, da velja $az > \beta$, oziroma

$$ax^* + \epsilon(ax^* - ay) > \beta,$$

kar pomeni, da mora biti $ax^* > ay$. Ta neenakost ne more pripadati sistemu $A''x \leq b''$, sicer bi za zgornjo mejo števila ϵ vzeli $\frac{\beta - ax^*}{a(x^* - y)}$:

$$az = ax^* + \epsilon(ax^* - ay) < ax^* + \frac{\beta - ax^*}{a(x^* - y)} a(x^* - y) = \beta.$$

Torej neenakost pripada $A'x \leq b'$.

Ker je $ax^* - az$ negativno in $\frac{1}{\epsilon}$ pozitivno, je

$$ay = ax^* + \frac{1}{\epsilon}(ax^* - az) < \beta.$$

Dokazali smo, da za vsak $y \in P \setminus F$ obstaja neenakost sistema $A'x \leq b'$, da velja neenakost $ay < \beta$, torej $A'y \neq b'$. $\square$

Relacija "je lice" je tranzitivna:

Posledica 1 *Naj bo P polieder in F njegovo lice. Potem je F spet polieder in množica $F' \subseteq F$ je lice poliedra P, če in samo če je lice poliedra F.*

Definicija 4 *Naj bo P polieder.* ***Maksimalno lice*** *poliedra P dimenzije n je lice največje dimenzije, ki ni cel P, torej dimenzije $n-1$.*
Pravimo, da neenakost $cx \leq \delta$ ***definira*** *maksimalno lice, če je $cx \leq \delta$ za vsak $x \in P$ in je $\{x \in P : cx = \delta\}$ maksimalno lice poliedra P.*

Tridtev 2 *Naj bo $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ neprazen polieder dimenzije $n - rang(A)$. Naj bo $A'x \leq b'$ minimalen sistem neenakosti, da $P = \{x : Ax = b, A'x \leq b'\}$. Potem vsaka neenakost sistema $A'x \leq b'$ definira neko maksimalno lice in vsako maksimalno lice je definirano z neki neenakostjo sistema $A'x \leq b'$.*

Dokaz: Če $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, nima maksimalnih lic in trditev velja.

Naj bo $A'x \leq b'$ minimalen sistem neenakosti, da $P = \{x : Ax = b, A'x \leq b'\}$, $a'x \leq \beta'$ ena od teh neenakosti in $A''x \leq b''$ preostanek sistema $A'x \leq b'$. Vzemimo tak vektor y, da velja $Ay = b$, $A''y \leq b''$ in $a'y > \beta'$. Tak vektor obstaja, ker neenakost $a'x \leq \beta'$ ni odvečna v sistemu. Naj bo $x \in P$ tak, da $a'x < \beta'$. Definirajmo $z := x + \frac{\beta' - a'x}{a'y - a'x}(y - x)$. Velja, da $a'z = \beta'$, torej leži v hiperravnini, ki se poliedra dotika v F.

Pokazati moramo še, da $z \in P$, to je da zadošča še ostalim neenakostim, torej sistemu $A''x \leq b''$:

$$A''z = (1 - \frac{\beta' - a'x}{a'y - a'x})A''x + \frac{\beta' - a'x}{a'y - a'x}A''y \leq (1 - \frac{\beta' - a'x}{a'y - a'x})b'' + \frac{\beta' - a'x}{a'y - a'x}b'' = b''.$$

Res velja, ker $0 < \frac{\beta' - a'x}{a'y - a'x} < 1$.

Tako je $F := \{x \in P : a'x = \beta'\} \neq \emptyset$ lice dimenzije $dim(P) - 1$ in $F \neq P$, ker $x \in P \setminus F$, torej je maksimalno lice.

Iz trditve 1 sledi, da je vsako maksimalno lice definirano z neko neenakostjo sistema $A'x \leq b'$. $\square$

Še en pomemben razred lic v poliedru so minimalna lica.

Definicija 5 ***Minimalna*** *so lica, ki ne vsebujejo drugih lic.*

Tridtev 3 *Naj bo $P = \{Ax \leq b\}$ polieder. Naprazna podmnožica $F \subseteq P$ je minimalno lice poliedra P natanko tedaj, ko je $F = \{x : A'x = b'\}$ za nek podsistem $A'x \leq b'$ sistema $Ax \leq b$.*

Dokaz: $\Rightarrow$: Če je F minimalno lice poliedra P, po trditvi 1 obstaja podsistem $A'x \leq b'$ sistema $Ax \leq b$, da je $F = \{x \in P : A'x = b'\}$. Izberimo $A'x \leq b'$ maksimalen. Naj bo $A''x \leq b''$ minimalen podsistem $Ax \leq b$, da je $F = \{x : A'x = b', A''x \leq b''\}$. Radi bi dokazali, da $A''x \leq b''$ ne vsebuje nobene neenakosti.

Pa privzemimo nasprotno: naj bo $a''x \leq \beta''$ neenakost iz sistema $A''x \leq b''$. Ker ni odvečna za opis množice F, je po trditvi 2 množica $F' := \{x : A'x = b', A''x \leq b'', a''x = \beta''\}$ maksimalno lice poliedra F, definirano z neenakostjo $a''x = \beta''$. Po pravilu tranzitivnosti, je F' tudi lice poliedra P, kar je v nasprotju s tem, da je F minimalno.

$\Leftarrow$: Bodi $F = \{x : A'x = b'\} \subseteq P$ za nek podsistem $A'x \leq b'$ sistema $Ax \leq b$. Po trditvi 1 je F lice P. Očitno F nima drugih lic razen sebe, torej je minimalno. $\square$

Posledica 2 *Za polieder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ so vsa minimalna lica dimenzije $n - rang(A)$. Pri politopih so to natanko oglišča.*

Bazne rešitve

Definicija 6 ***Dopustna bazna rešitev*** *linearnega programa*

$$max\, c^T x, \quad pri\ pogojih \quad Ax = b, \quad x \geq 0,$$

kjer je A ranga m, je dopustna rešitev x, za katero obstaja množica $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ moči m, da velja:

- *stolpci matrike A, indeksirani z elementi množice B, so linearno neodvisni;*
- *$x_i = 0$ za vse $i \notin B$.*

Spremenljivke, indeksirane z elementi iz B, so ***bazne****.*

Poglejmo si še eno definicijo oglišča poliedra: vsaka točka $x \in P$, za katero ne obstajata točki y in $z \in P$ taki, da x leži na polovici daljice med tema dvema točkama. To definicijo bomo uporabili pri dokazu naslednjega izreka:

Tridtev 4 *Naj bo $x \in P$, kjer je P množica dopustnih rešitev linearnega programa*

$$\max c^T x, \quad \text{pri pogojih} \quad Ax = b, \quad x \geq 0.$$

Potem je x oglišče poliedra P natanko tedaj, ko je dopustna bazna rešitev.

Dokaz: $\Leftarrow$: Predpostavimo, da je rang sistema m. Ko ustrezno preindeksiramo spremenljivke, naj bo $x = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ neka dopustna bazna rešitev pri baznih spremenljivkah $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Stolpci matrike A, ki ustrezajo tem spremenljivkam, morajo biti linearno neodvisni.

Pa predpostavimo, da x ni oglišče. Tedaj po definiciji obstajata dve različni dopustni rešitvi $p \geq 0$ in $q \geq 0$ taki, da x leži na polovici daljice, ki ju povezuje, oziroma

$$x = \frac{1}{2}(p + q).$$

Sledi, da za vse indekse j, ki ustrezajo nebaznim spremenljivkam ($j = m + 1, \ldots, n$), velja

$$x_j = \frac{1}{2}(p_j + q_j) = 0, \quad p_j \geq 0 \quad \text{in} \quad q_j \geq 0.$$

To pa je možno le, če $p_j = q_j = 0$. Točke p, q in x imajo torej iste vrednosti komponent, ki ustrezajo nebaznim spremenljivkam. Ker so vrednosti baznih enolično določene z vrednostmi nebaznih spremenljivk, mora veljati $p = q = x$. Prišli smo v protislovje, torej je x oglišče poliedra.

$\Rightarrow$: Spet predpostavimo, da je rang sistema m. Ko ustrezno preindeksiramo spremenljivke, naj bo $x = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, 0, \ldots, 0) \geq 0$ oglišče poliedra dopustnih rešitev.

Potem mora biti prvih k stolpcev matrike A neodvisnih: če niso, potem za nek stolpec k velja $a_k = \sum_{i=1}^{k-1} y_i a_i$. To bi pomenilo, da so rešitve oblike $x(\lambda) = (x'_1 - \lambda y_1, \ldots, x'_{k-1} - \lambda y_{k-1}, x_k - \lambda, 0, \ldots, 0)$ dopustne za $-\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ za nek $\lambda_0 > 0$. Tedaj je x na daljici med dvema dopustnima rešitvama, saj $x = \frac{1}{2}(x(-\lambda_0) + x(\lambda_0))$, kar je v protislovju s tem, da je oglišče.

Ker je največje število neodvisnih stolpcev m, mora biti $k \leq m$.

Če $k = m$, je po definiciji x dopustna bazna rešitev.

Naj bo $k < m$. Tedaj lahko dopolnimo neodvisne stolpce $j = 1, \ldots, k$ z $m - k$ dodatnimi neodvisnimi stolpci z indeksi $j_{k+1}, \ldots, j_m$, skupaj s katerimi lahko skonstruiramo dopustno bazo. Pripadajočo dopustno bazno rešitev dobimo, če postavimo $x_{j_{k+1}} = \ldots = x_{j_m} = 0$. $\square$

Opomba: V zadnjem delu dokaza dopolnitev z $m - k$ neodvisnimi stolpci ni enolična, torej lahko vsako oglišče ustreza večim dopustnim baznim rešitvam, medtem ko vsaka dopustna bazna rešitev ustreza natanko enemu oglišču.

Tridtev 5 *Naj bo*

$$\max c^T x, \quad \text{pri pogojih} \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

linearni program. Potem velja:

(a) Če obstaja vsaj ena dopustna rešitev in je kriterijska funkcija navzgor omejena na množici dopustnih rešitev, potem obstaja optimalna rešitev.

(b) Če obstaja optimalna rešitev, potem obstaja dopustna bazna rešitev, ki je optimalna.

Zaključimo lahko, da ima linearni program v enačajski obliki končno mnogo baznih dopustnih rešitev in če je dopusten in omejen, potem je vsaj ena od baznih dopustnih rešitev optimalna. Kaj pa velja za splošem linearni program?

Definicija 7 ***Dopustna bazna rešitev*** *linearnega programa z n spremenljivkami je dopustna rešitev, za katero obstaja n linearno neodvisnih neenakosti, da veljajo enakosti. Tu so všteti tudi pogoji nenegativnosti.*

Definicija dopustnih baznih rešitev za enačajsko obliko linearnega programa je le poseben primer nove definicije, saj m linearno neodvisnih enakosti že imamo, ostale pa dobimo, ko $n - m$ nebaznih spremenljivk postavimo na 0.

Literatura

[1] Bernhard H. Korte, Jens Vygen: *Combinatorial optimization: theory and algorithms*

[2] George Bernard Dantzig, Mukund Narain Thapa: *Linear Programming: Theory and extensions*

[3] J. Matoušek, B Gärtner: *Understanding and using linear programming*