# Problem razvoza in metoda simpleksov za omrežja

Anja Ekar

1. november 2009

## 1 Uvod

*Problem razvoza* se je v zgodovini linearnega programiranja izkazal kot poseben problem ter priložnost za izdelavo novih načinov programiranja s simpleksno metodo. Kot sta pokazala George B. Dantzig (1951) in Alex Orden (1956), ima struktura problemov razvoza to lastnost, da pri njej lahko simpleksno metodo poenostavimo v *simpleksno metodo za omrežja.* To lahko naredimo iz obstoječe simpleksne metode ali pa jo izdelamo od začetka.

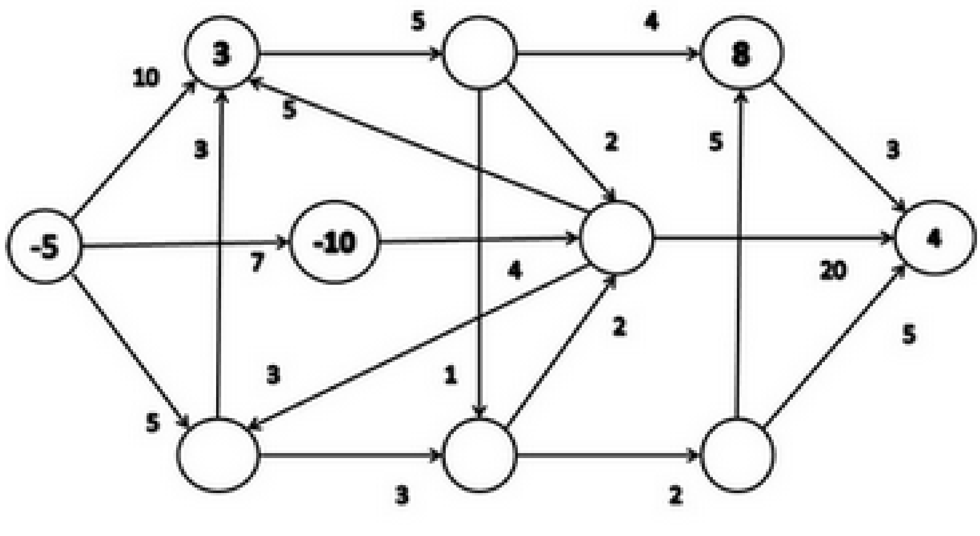
## 2 Problem razvoza

**Definicija 1** Omrežje $G(V, E)$ *je usmerjen graf s cenami (vrednostmi) c na povezavah,* $c \in \mathbb{R}^E$, *kjer imamo v vsakem vozlišču povpraševanje oziroma produkcijo nekega proizvoda, opisano z vektorjem ponudbe oziroma povpraševanja* $b \in \mathbb{R}^V$*:*
*Dano imamo*

$b_v, v \in V$ *je* povpraševanje v vozlišču $v$, *pri čemer velja* $b_v = \begin{cases} + & \textit{poraba v vozlišču v} \\ - & \textit{proizvodnja v vozlišču v} \end{cases}$

*in za vsak c velja:*

$c \in \mathbb{R}^E$, *pri čemer velja* $c_{uv}$ *je* cena razvoza 1 enote po povezavi $uv$.




*Slika 1:* Primer omrežja, v katerem bomo reševali problem razvoza.

Tu iščemo rešitev, kako prepeljati določeno količino nečesa z enega kraja do drugega na najcenejši način. Omrežje predstavimo tako, kot je predstavljeno na sliki 1.

$c : E(G) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c(e) \in \mathbb{R}$ (funkcija iz $E$ v $\mathbb{R}$)
$\mathbb{R}^E$ lahko identificiramo z $\mathbb{R}^m; m = |E|$
$c_{uv}$ cena razvoza enote proizvoda po povezavi $uv$ (od $u$ do $v$)

Dano imamo (cestno, železniško, telefonsko,...) omrežje. V vozliščih omrežja se proizvaja/porablja določen proizvod. Ta proizvod želimo razvoziti od kraja proizvodnje do porabnikov. Pri tem želimo minimizirati stroške razvoza.

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je celotna proizvodnja enaka celotni porabi, prav tako pa tudi, da je omrežje povezano. To sicer v resničnem življenju zmerom ni res, a nam problem poenostavi, da ga lažje rešimo.

# 3 Kombinatorični opis problema razvoza

Vektor $x \in \mathbb{R}^E$ opisuje razvoz (za vsako povezavo povemo, koliko enot prepeljemo vzdolž te povezave), če zadošča naslednjim pogojem:

(i) $x \geq 0$ (po komponentah),

(ii) Kirchoffovi pogoji
Za $\forall v \in V$ velja:
$$\sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e = b_v$$
$\delta^-(v)$ – vhodne povezave, $\delta^+(v)$ – izhodne povezave.

Cena razvoza $x$ je enaka:
$$\sum_{uv \in E} c_{uv} \cdot x_{uv} \equiv c^T x.$$

Zapis pogoja (ii) v matrični obliki $Ax = b$:
Vrstice usmerjene incidenčne matrike $A$ ustrezajo vozliščem $v \in V$, stolpci pa povezavam. Vsak stolpec ima $-1$ na mestu, kjer se povezava začne, in 1 na mestu, kjer se konča.

$$A = \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ 0 \\ u \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{c|c|c} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ & -1 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ & 1 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{V \times E}$$

Problem razvoza formuliramo sledeče:
Dano imamo:

- omrežje $G$, podano z usmerjeno incidenčno matriko $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$,
- vektor povpraševanja $b \in \mathbb{R}^V$(vsota komponent je enaka $0, \sum_{v \in V} b_v = 0$),
- cena $c \in \mathbb{R}^E$.

Tu rešujemo problem:

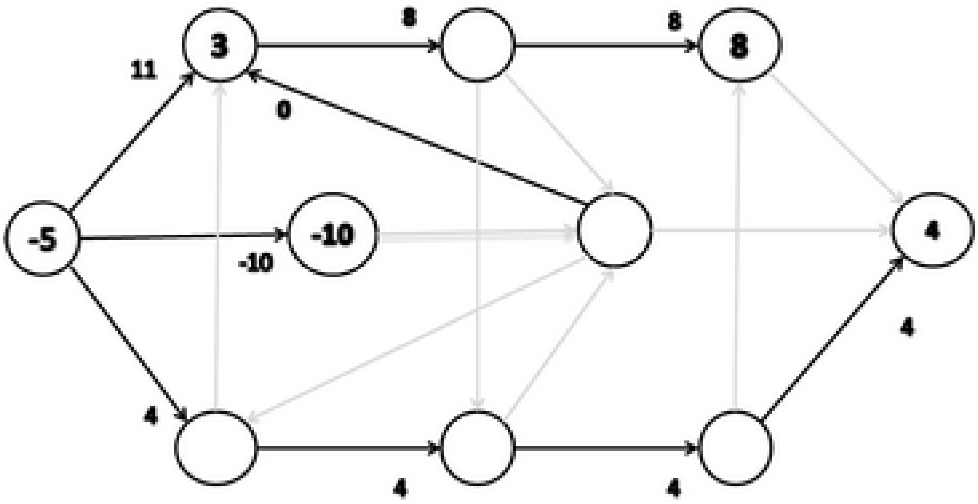
$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &p.p. Ax = b \\ &\quad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Problem razvoza rešujemo enostavneje kot splošne linearne programe.

**Definicija 2** *$x \in \mathbb{R}^E$ je* drevesna rešitev*, če je $Ax = b$ (ni nujno $x \geq 0!$) in če obstaja vpeto drevo $T$ v omrežju $G$, tako da je $x_e = 0$ za vsako povezavo $e \notin E(T)$.*

Predpostavimo lahko, da je dano omrežje povezano.

**Lema 1** *Za vsako vpeto drevo $T$ v $G$ obstaja natanko ena rešitev $x \in \mathbb{R}^E$, ki je ničelna izven $T$.*




*Slika 2:* Primer vpetega drevesa, za katerega pripadajoči razvoz ni dopustna rešitev problema, saj po povezavi (iz $-10$) ne moremo iti v obratni smeri.

**Opomba 1** *Če je $b$ celoštevilski, je vsaka drevesna rešitev $x$ tudi celoštevilska.*

# 4 Reševanje z metodo simpleksov za omrežja

## 4.1 Ničti korak

Predpostavimo, da je dana drevesna rešitev $x$, ki je dopustna in ustreza vpetemu drevesu $T$ :

$$Ax = b, x \geq 0, x_{uv} = 0 \text{ za } uv \notin E(T). \tag{1}$$

## 4.2 Prvi korak

Izračunamo pripadajoče "poštene" cene: $y_v$ v neki poljubni točki uvedemo poljubno, potem pa pogoji (1) enolično določajo $y_u, u \in V$.

Določimo $y \in \mathbb{R}^V$, tako da za vsak $uv \in E(T)$ velja: $y_v = y_u + c_{uv}$

$$\bar{c} := c - A^T y$$
$$\bar{c}_{uv} = c_{uv} + y_u - y_v$$

Če $uv \in E(T)$, potem je $\bar{c}_{uv} = 0$. Velja tudi $x_{uv} = 0$ za $uv \notin E(T)$. Sledi $\bar{c}^T x = 0$.

**Trditev 1** *Če je $A\bar{x} = b$, potem je $c^T\bar{x} = c^T x + \bar{c}^T\bar{x}$.*

DOKAZ:

$$c^T\bar{x} = (\underbrace{\bar{c} + A^T y}_{c})^T\bar{x} = \bar{c}^T\bar{x} + y^T A\bar{x} = \bar{c}^T\bar{x} + y^T b =$$

Ker je $x$ dopustna rešitev, je tudi $Ax = b$, zato velja ista formula za $\bar{x} = x$ : $c^T x = \underbrace{\bar{c}^T x}_{=0} + y^T b \Rightarrow c^T x = y^T b$.

$$= \bar{c}^T\bar{x} + y^T b = \bar{c}^T\bar{x} + c^T x$$

□

## 4.3 Drugi korak

Poiščemo tako povezavo $uv$, da velja $y_u + c_{uv} < y_v$ (takim povezavam pravimo *vhodne povezave*).

**Trditev 2** *Če take povezave ni, je $x$ optimalna rešitev.*

DOKAZ: Naj bo $\bar{x}$ poljubna druga rešitev. Po trditvi 1: $c^T\bar{x} = c^T x + \overbrace{\underbrace{\bar{c}^T}_{\geq 0}\underbrace{\bar{x}}_{\geq 0}}^{\geq 0}$, ker prištejemo še nekaj pozitivnega, torej je lahko kvečjemu večje. □

## 4.4 Tretji korak

Izberemo povezavo, ki jo bomo odstranili iz $T$, na naslednji način:

V grafu $T + uv$ obstaja natanko en cikel $C$, ki ni nujno usmerjen.

Na $C$ poiščemo povezavo $f$, ki je na $C$ usmerjena nasprotno kot $e = uv$ in je na njej $x_f$ minimalen.

(a) Če taka povezava ne obstaja, potem je $C$ usmerjen cikel in je vsota cen povezav na $C$ negativna. Reševanje je tedaj končano, saj je problem neomejen.

(b) Če $f$ obstaja, potem $T' := T + e - f$. Razvoz po drevesu spremenimo tako, da za vsako povezavo na $C$ razvoz po povezavah povečamo za $t$ (če je povezava enako usmerjena kot $uv$) oziroma zmanjšamo za $t$ (če je povezava v obratni smeri). Pri tem je $t$ dosedanja vrednost razvoza po povezavi $f$. Novi razvoz je nenegativen in drevesni po $T'$.

## 4.5 Iskanje začetne drevesne rešitve

*Navidezni problem:* Zamislimo si navidezno vozlišče $w$ (ali enega od obstoječih) ter ga povežemo z izvori in ponori. Te navidezne povezave skupaj z dodatnimi določajo vpeto drevo. Če tem povezavam damo zelo visoko ceno, ne bodo vsebovane v optimalni rešitvi. Če bodo te povezave kljub vsemu ostale v rešitvi, potem razvoz sploh ne bo obstajal. Namesto zelo velikih cen lahko damo ceno 1 na navidezne ter 0 na originalne povezave.

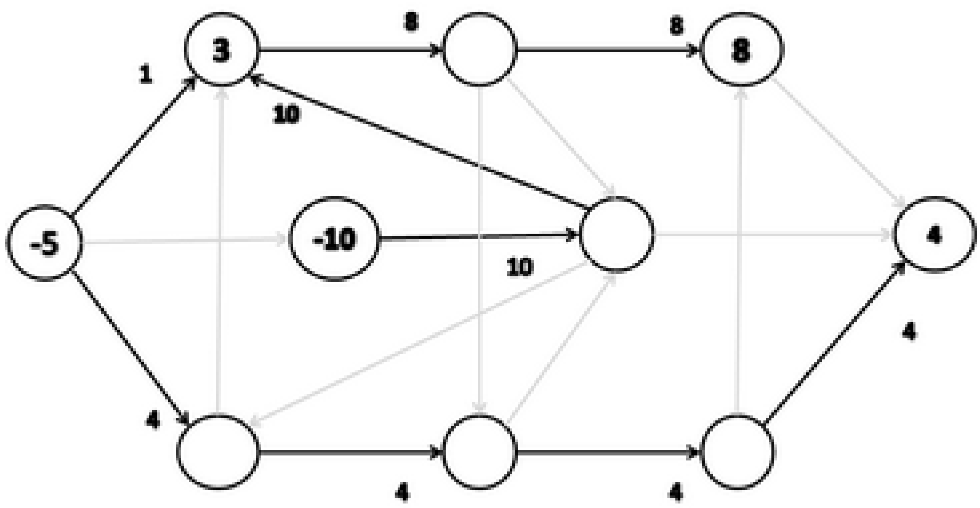
*Navidezna naloga:* Drevesna rešitev za navidezno nalogo je očitna. Ves razvoz je skozi $w$. Drevo $T$ vsebuje vse povezave s krajiščem v $w$ in še nekatere iz $G$ (po njih je razvoz enak 0). Določimo cene povezav: 1 za dodatne povezave, 0 za originalne povezave. Pri reševanju te navidezne naloge dobimo razvoz s ceno 0 natanko tedaj, ko obstaja razvoz za originalno nalogo. Če pa navidezna naloga nima razvoza s ceno 0, potem začetna naloga nima dopustne rešitve.

Primerjava postopka s simpleksnim algoritmom za linearno programiranje:

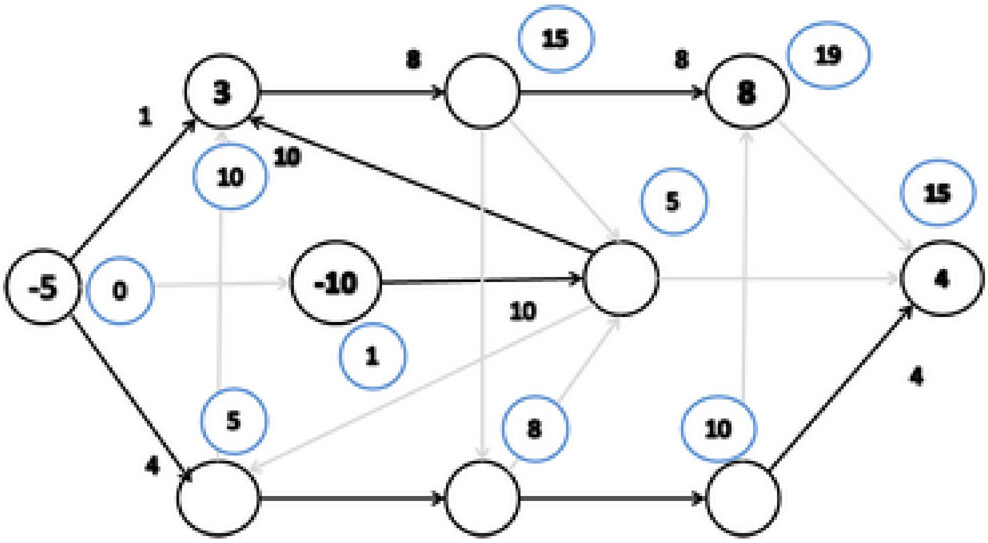
- drevesne rešitve so v korespondenci z baznimi rešitvami pri običajni metodi simpleksov.
- $y$ ustreza dualni nalogi,

| Osnovna in dualna naloga | |
|---|---|
| $\min c^T x$ | $\max b^T x$ |
| *p.p.* $Ax = b$ | *p.p.* $A^T y \leq c$ |
| | $\bar{c} = c - A^T y$ |
| $x \geq 0$ | $A^T y \leq c \Leftrightarrow \bar{c} \geq 0$ |

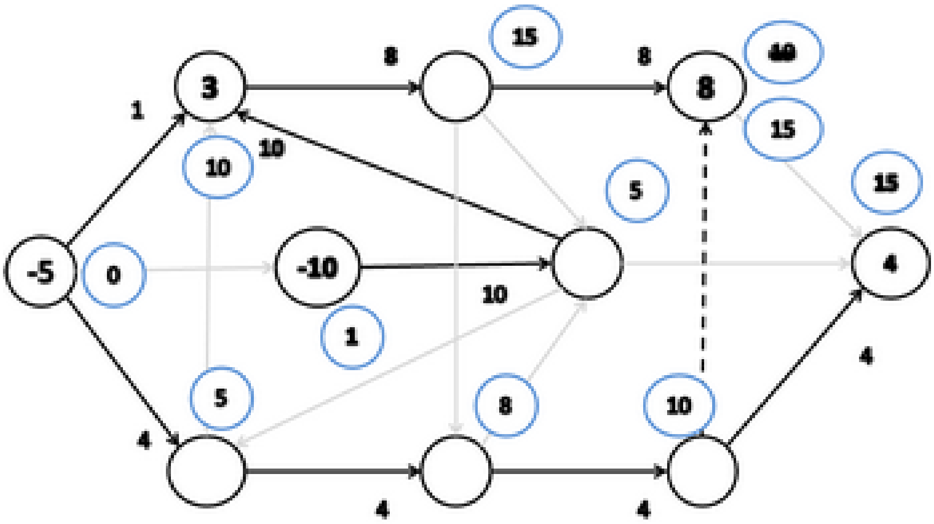
## 4.6 Prikaz postopka na primeru



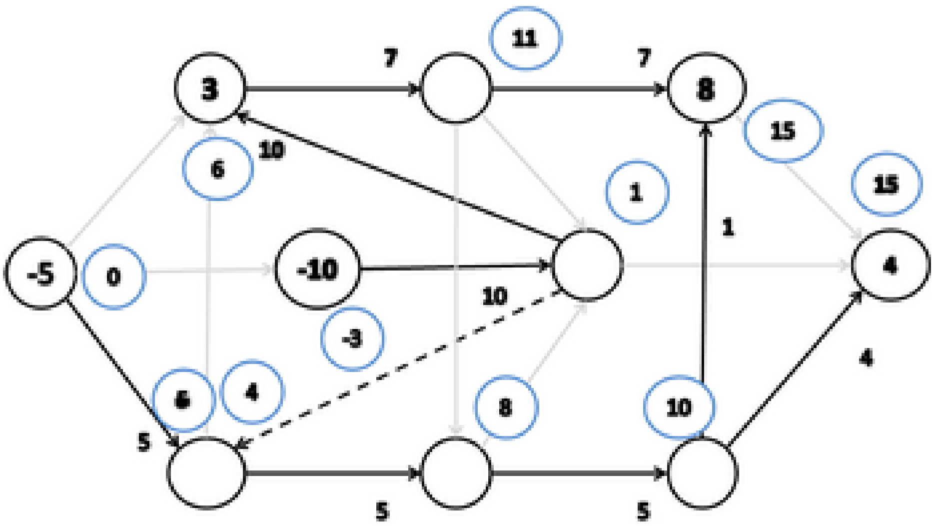

*Slika 3:* Primer vpetega drevesa, ki je dopustna rešitev problema.



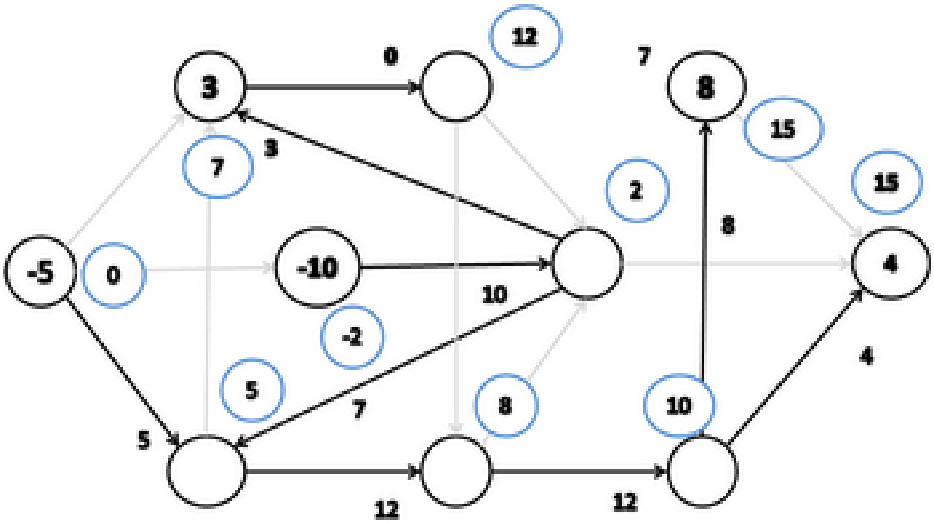

*Slika 4:* Na drevesni rešitvi zapišemo pri vozliščih pripadajoče cene prevoza po dani rešitvi ter število enot izdelka, ki jih pošljemo po povezavi.



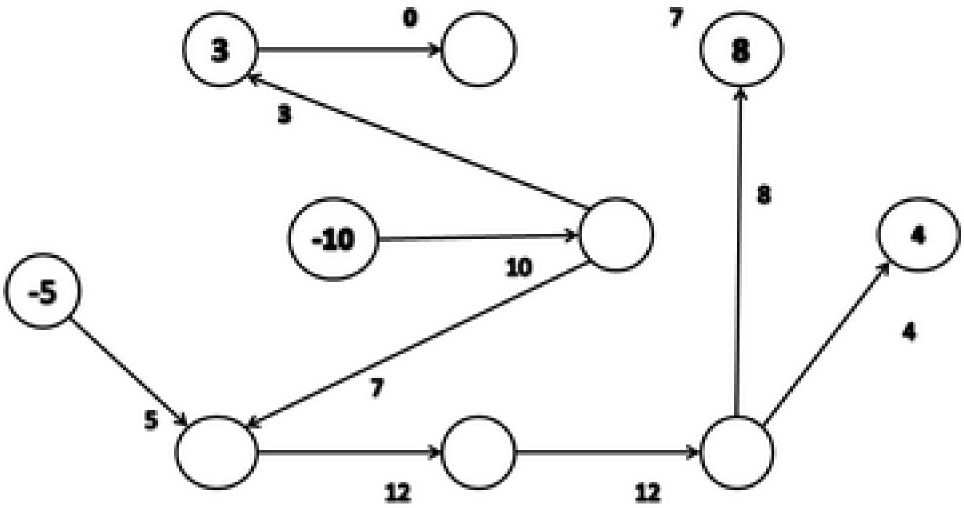

*Slika 5:* Izračunamo cene prevoza po dani rešitvi. Opazimo, da nam črtkana povezava ponuja boljšo rešitev. Iz nastalega cikla odstranimo nasprotno usmerjeno povezavo s ceno 1.




*Slika 6:* Izračunamo cene prevoza po dani rešitvi. Opazimo, da nam črtkana povezava ponuja boljšo rešitev. Iz nastalega cikla odstranimo povezavo s ceno 7.




*Slika 7:* Izračunamo cene prevoza po dani rešitvi. Ker ne najdemo povezave z boljšo rešitvijo, zaključimo, da smo našli najboljši razvoz.




*Slika 8:* Končni razvoz

Cena razvoza je torej:

$5 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 12 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 5 =$
$= 25 + 21 + 40 + 15 + 0 + 36 + 24 + 40 + 20 = 221$

## 4.7 Uporaba postopka za problem razvoza v teoretični matematiki

**Izrek 1 (o celoštevilskosti)** *Če je pri problemu razvoza povpraševanje b celoštevilsko in ima problem dopustno rešitev, potem ima tudi celoštevilsko dopustno rešitev. Če ima optimalno rešitev, ima tudi celoštevilsko optimalno rešitev.*

### Literatura


[1] V. Chvátal, *Linear programming*, W. H. Freeman and Company, New York, 1983

[2] zapiski iz prejšnjih let

# 5 Naloga iz 2. izpita 2.6.2004, Optimizacija

V trgovskem podjetju so iz skladišč v trgovine vozili blago, kot je prikazano na levem grafu. Po prihodu v podjetje se želite izkazati in poiskati cenejši način, zato najprej ugotovite, koliko je strošek prevoza ene enote blaga med posameznimi destinacijami. Stroški so prikazani na desnem grafu. Poiščite torej optimalen razvoz! Začnite z obstoječim razvozom!