

Kako dolimo vse rešitve lin. programa?

Recimo, da na koncu dolimo slovar

$$x_4 = 3 + x_2 - 2x_5 + 7x_3$$

$$x_1 = 1 - 5x_2 + 6x_5 - 8x_3$$

$$x_6 = 4 + 9x_2 + 2x_5 - x_3$$

$$z = 8 - x_3$$

Optimalna vrednost je $z^* = 8$, dosežena pa v tč $x_4 = 3, x_1 = 1, x_6 = 4$, ostali 0.

Kako dolimo vse rešitve:

Paisicemo spremenljivke, ki imajo pri z koef. enak 0.

Te imajo lahko polj. vrednost. Tiste, ki nastorajo s neg. koeficientom, morajo imeti vrednost enako 0.

Prepišemo slovar:

$$x_4 = 3 + x_2 - 2x_5 \geq 0$$

$$x_1 = 1 - 5x_2 + 6x_5 \geq 0$$

$$x_6 = 4 + 9x_2 + 2x_5 \geq 0$$

\Rightarrow

$$-x_2 + 2x_5 \leq 3$$

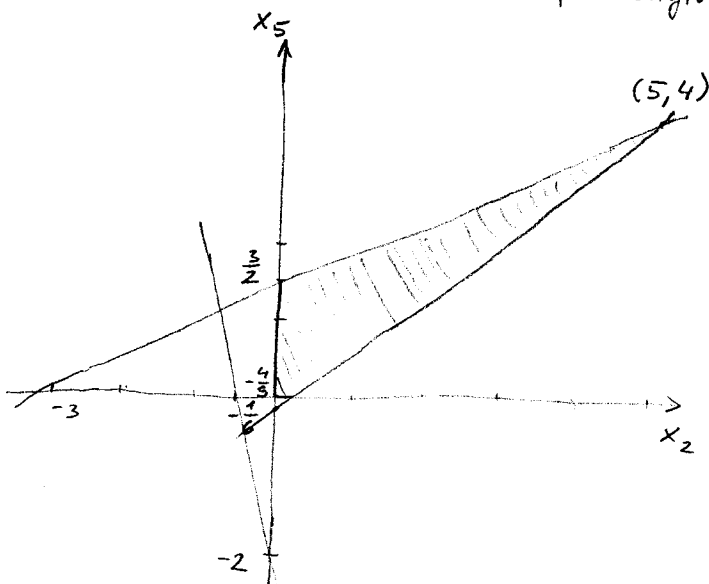
$$5x_2 - 6x_5 \leq 1$$

$$-9x_2 - 2x_5 \leq 4$$

$$x_2, x_5 \geq 0$$

v resnici odveč

znebimo baznih spremenljivk (enakosti v neenakosti)



$$x_5 \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_2$$

$$x_5 \geq \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}$$

$$x_5 \geq -\frac{9}{2}x_2 - 2$$

$$x_2, x_5 \geq 0$$

Po nekaj korakih metode simpleksov smo dobili naslednji slovar:

$$x_1 = 2 - x_3$$

$$x_2 = 1 + x_3 - x_5$$

$$x_4 = 1 - x_3 + x_5$$

$$z = 3 - x_5$$

(a) Pavišči račitno nalogo v std obliko!

Imamo dve svig. sprem., x_1 in x_2 , ter tri omejitve.

Iščemo enakovreden slovar, kjer sta x_1 in x_2 nebrani.

$$x_3 = 2 - x_1$$

$$x_5 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - x_2 + (2 - x_1) = 3 - x_1 - x_2$$

$$x_4 = 1 - (2 - x_1) + (3 - x_1 - x_2) = 2 - x_2$$

$$z = 3 - x_5 = x_1 + x_2$$

Torej:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b) Pavišči vse optimalne rešitve rač. naloge.

Slovar iz besedila naloge je redujli slovar.

Pogledamo reduji z:

$$x_5^* = 0, \quad x_3^* \geq 0 \text{ p.p.} \quad 2 - x_3^* \geq 0 \Rightarrow x_3^* \leq 2$$

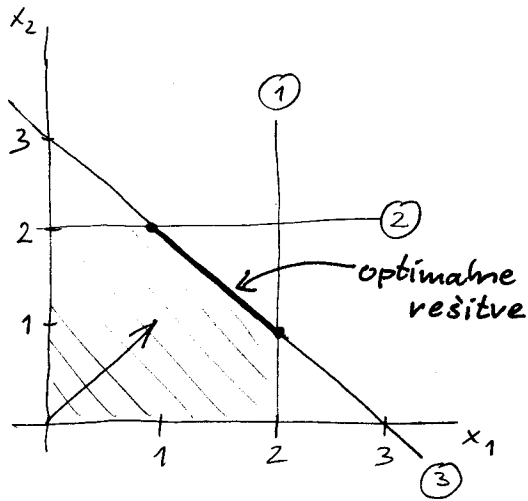
$$1 + x_3^* \geq 0 \text{ p.p.}$$

$$1 - x_3^* \geq 0 \Rightarrow x_3^* \leq 1$$

Dalimo

$$x^* = \begin{bmatrix} 2 - x_3^* \\ 1 + x_3^* \end{bmatrix}, \quad x_3^* \in [0, 1]$$

Pogledimo še grafično vse optimalne rešitve.



(c) Zapiši dualno nalogo in jo reši.

$$\min 2y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

P.P.

$$y_1 + y_3 \geq 1$$

$$y_2 + y_3 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Ker smo računalno nalogo ^{re} rešili z metodo se,
le preberemo rezultat:

$$y^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Preverimo: y^* je dopusten, vrednost je 3.

1. Dani so naslednji slovarji:

Slovar A:

$$\begin{array}{r} x_1 = \quad - \quad x_3 + \quad x_4 + \quad x_6 \\ x_2 = \quad 2 - 4x_3 - \quad x_4 - 2x_6 \\ x_5 = \quad 1 - 5x_3 - 2x_4 - 2x_6 \\ \hline z = -12 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_6 \end{array}$$

Slovar B:

$$\begin{array}{r} x_4 = 1 + 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_5 = 3 - 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_6 = 1 + 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \hline z = 1 + 2x_1 + x_2 + 4x_3 \end{array}$$

Slovar C:

$$\begin{array}{r} x_1 = 2 - 2x_3 - 5x_4 - x_6 \\ x_2 = \quad - 4x_3 - x_4 - 2x_6 \\ x_5 = \quad - 3x_3 - 5x_4 - 2x_6 \\ \hline z = 7 - 2x_3 - x_4 - 2x_6 \end{array}$$

Slovar D:

$$\begin{array}{r} x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 \\ x_5 = -1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 \\ x_6 = 2 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 \\ \hline z = 3 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 \end{array}$$

(a) Za vsakega od slovarjev A, B, C in D ugotovi:

(i) Ali je dopusten?

Za vsak dopusten slovar ugotovi še:

(ii) Ali je izrojen?

(iii) Katera bi bila vhodna spremenljivka, katera izhodna in kakšna bi bila nova vrednost kriterijske funkcije, če bi naredili korak metode simpleksov z uporabo pravila najmanjšega indeksa?

(b) Za slovar A izračunaj, kateremu linearnemu programu v standardni obliki pripada.

(a) Pogledati moramo, ali so konstante v zgornjem delu slovanja ≥ 0 .

Slovanji A, B, C so dopustni, slovar D pa ne.

Slovar A: je izrojen ($x_1 = 0$ je klama)

Vhodna sprem. x_6 , izstopna x_5 , povečanje $2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \rightarrow -11$

Slovar B: ni izrojen

Vhodna sprem. x_1 , izstopna x_5 , povečanje $2 \cdot 1 = 2 \rightarrow 3$

Slovar C: je izrojen ($x_2 = x_5 = 0$ sta klami)

Ni vhodne sprem., gre za radujici slovar.

(b) Zapišimo slovar A v matricni obliki:

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \downarrow^+ \\ \downarrow^+ \\ \downarrow^+ \end{array} \right) \cdot 2$$

Tu želimo dodati identiteto.

$$\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \uparrow - \\ \uparrow - \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cccccc|c} -2 & -1 & -6 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Zgornji del računskega slovarja je tako

$$x_4 = -2 + 2x_1 + x_2 + 6x_3$$

$$x_5 = 1 - 2x_1 - 7x_3$$

$$x_6 = 2 - x_1 - x_2 - 5x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kvadratna funkcija:

$$z = -12 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_6$$

$$= -12 - 2x_3 - 4(-2 + 2x_1 + x_2 + 6x_3) + 2(2 - x_1 - x_2 - 5x_3)$$

$$= (-12 + 8 + 4) + x_3(-2 - 24 - 10) + x_1(-8 - 2) + x_2(-4 - 2)$$

$$= -10x_1 - 6x_2 - 36x_3$$

$$c = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \\ -36 \end{bmatrix}$$

1. kolokvij iz RAČUNALNIŠTVA 3

12. FEBRUAR 2009

1. Dani so naslednji slovarji:

Slovar A:

$$\begin{array}{r} x_2 = 6 - 4x_1 + x_3 + x_5 \\ x_4 = 3 - 2x_1 + x_3 - x_5 \\ x_6 = 1 + x_1 - x_3 - 3x_5 \\ \hline z = -2 + x_1 + 2x_3 - 2x_5 \end{array}$$

Slovar B:

$$\begin{array}{r} x_1 = 7 - x_3 - 3x_4 - x_6 \\ x_2 = 11 - x_3 - 5x_4 - 2x_6 \\ x_5 = -2x_3 + 7x_4 - 3x_6 \\ \hline z = 10 - 2x_3 - 3x_6 \end{array}$$

Slovar C:

$$\begin{array}{r} x_2 = 2 + 2x_1 + x_6 \\ x_4 = -2 + x_1 - x_3 - x_6 \\ x_5 = 1 - x_1 + x_3 \\ \hline z = 12 - x_1 + 2x_3 - 2x_6 \end{array}$$

Slovar D:

$$\begin{array}{r} x_2 = 2 - x_1 + 2x_5 - x_6 \\ x_3 = + x_1 + x_5 + x_6 \\ x_4 = 4 + 2x_5 - 5x_6 \\ \hline z = 3 + 2x_1 + x_5 - x_6 \end{array}$$

- Za vsakega od slovarjev A, B, C, D ugotovi, ali je dopusten.
- Za vsak dopusten slovar ugotovi, katera bi bila vhodna spremenljivka, katera izhodna in kakšna bi bila nova vrednost kriterijske funkcije, če bi naredili korak metode simpleksov z uporabo pravila najmanjšega indeksa.
- Za vsak dopusten slovar ugotovi, ali je izrojen, ali je končen in ali obstaja spremenljivka, s pomočjo katere lahko iz tega slovarja razberemo, da je ustrezen problem neomejen.
- Za vsak končen slovar poišči vse optimalne rešitve ustreznega linearnega programa.

(a) Dostopni so slovanji A, B in D.

C ni dostopen, ker je $x_4 < 0$ (2. omejitev ni izpolnjena).

(b)

	vhodna	izhodna	nova vrednost
A	x_1	x_2	$-2 + 1 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$
B	ni vhodne		
D	x_1	x_2	$3 + 2 \cdot 2 = 7$

(c)

	izrojen	končen	neomejenost
A	ne	ne	ne
B	da	da	ne imamo ost. rešitev
D	da	ne	da sprem. x_5

(d) Slovar B $x_3 = x_6 = 0$

$x_4 \geq 0$ velj., upoštevati moramo omejitve iz zgornjega dela

$$\left. \begin{aligned} x_1 = 7 - 3x_4 \geq 0 &\Rightarrow x_4 \leq \frac{7}{3} \\ x_2 = 11 - 5x_4 \geq 0 &\Rightarrow x_4 \leq \frac{11}{5} \\ x_5 = 0 + 7x_4 \geq 0 &\Rightarrow x_4 \geq 0 \end{aligned} \right\} x_4 \leq \frac{11}{5}$$

Dobimo $x^* = [7 - 3t, 11 - 5t, 0]^T$ za $t \in [0, \frac{11}{5}]$.

1. Naj bo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

sistem linearnih neenakosti.

Naj bo \mathcal{E} množica tistih neenakosti, ki so pri vsaki rešitvi gornjega sistema izpolnjene z enakostjo.

(a) Predpostavimo, da ima gornji sistem rešitev. Dokažite, da ima potem tudi tako rešitev, pri kateri za vse neenakosti, ki niso v \mathcal{E} , velja stroga neenakost.

(b) Za sistem neenakosti

$$x_1 \leq 1, \quad -x_2 \leq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 2, \quad -x_1 - x_2 \leq -2$$

določite množico \mathcal{E} in poišči rešitev, katere obstoj zagotavlja točka (a).

(c) Opišite čim bolj učinkovit postopek, ki za dani sistem linearnih neenakosti ugotovi, ali ima rešitev, in v primeru, da ima rešitev, določi množico \mathcal{E} ter poišče rešitev, ki zadošča pogoju iz točke (a).

(a) Po predpostavki da vsako neenakost $E \notin \mathcal{E}$ obstaja vektor x_E , ki zadošča vsem neenakostim, pri čemer pri E velja strogi neenakost.

Opazimo $k := |\mathcal{E}^c|$, tj. k je število neenakosti, ki niso v \mathcal{E} . Potem je $x := \frac{1}{k} \sum_{E \notin \mathcal{E}} x_E$ iskani vektor.

(b) $x_1 \leq 1, -x_2 \leq 0, x_1 + x_2 \leq 2, -x_1 - x_2 \leq -2$
 $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$

Množico \mathcal{E} sestavljata 3. in 4. neenakost.

Iskana rešitev je npr. $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) Naj bo $A = [a_{ij}]_{i=1, j=1}^{m, n}$ in $b = [b_1, \dots, b_m]^T$.

(1) Obstoj rešitve: Rešimo $\min \{0^T x \mid Ax \leq b\}$.

(2) Določanje \mathcal{E} : Rešimo $\min \{a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \mid Ax \leq b\}$.

i -ta omejevalec je v $\mathcal{E} \Leftrightarrow$ opt. vrednost = b_i

Za rešitev iz točke (a) naredimo pravo linearno kombinacijo vseh opt. rešitev iz (2).