

# Zgodovina linearnega programiranja

Mojca Berden  
10. 11. 2009

Linearno programiranje sodi na področje optimizacijskih problemov, natančneje, ukvarja se z optimizacijo (maksimizacijo) linearne funkcije ob upoštevanju linearnih omejitev.

“Oče” metode simpleksov in v marsikaterem pogledu tudi celotnega linearnega programiranja, George B. Dantzig, je zapisal [2]: »Linearno programiranje lahko vidimo kot del velikega revolucionarnega razvoja, ki je dal človeštvu zmožnost, da postavi splošne cilje, in pokazal pot pri posameznih odločitvah, da najbolje doseže svoje cilje v zahtevnih praktičnih razmerah.«

Linearno programiranje z vsemi svojimi oblikami torej ponuja način za doseganje optimalne vrednosti (npr. maksimalnega dobička ali minimalnih stroškov) v danem matematičnem modelu. Kljub temu, da sega linearno programiranje na mnogo različnih področij znanosti (operacijske raziskave, ekonomija, teorija iger) in je zelo uporabno v marsikateri industrijski panogi, ima razmeroma kratko zgodovino.

## Obdobje pred letom 1947

Čeprav se zdijo problemi, s katerimi se ukvarja linearno programiranje, precej naravni, je bilo do leta 1947 o reševanju sistemov neenakosti bolj malo znanega in napisanega. V veliki meri je bila slaba tehnologija odločilen razlog, da znanstveniki niso imeli interesa ukvarjati se s problemi linearnega programiranja, saj so že razmeroma preprosti problemi pomenili težavno delo pri reševanju.

Zgovoren zgled je navedel Dantzig [2]: »Predstavljajte si, da morate 70 ljudem dodeliti 70 služb. Predpostavimo, da imamo korist  $v_{ij}$ , če dodelimo človeku  $i$  službo  $j$ . Izbira je sestavljena iz povezave človeka  $i$  s službo  $j$ . Omejitve so: vsak človek mora dobiti službo, vsaka služba mora biti nekemu dodeljena. Tako imamo 140 omejitev in 4900 različnih izbir z vrednostjo 1 ali 0, glede na to, ali je bila takšna izbira določena ali ne. Sledi, da imamo  $70!$  različnih dodeljevanj službe. Nemogoče bi bilo pregledati vse te možnosti in izračunati, katera nam prinaša največjo korist. Število  $70!$  je večje kot  $10^{100}$ . [...] Tudi če bi bila Zemlja polna paralelnih računalnikov, ki bi vsako sekundo izračunali bilijon možnosti, in bi začeli z računanjem že ob velikem puku, še do leta 1990 ne bi dobili odgovora.«

Bilo pa je nekaj izjem, ki so se že takrat ukvarjali s sistemi neenakosti, med katere sodi tudi Joseph Fourier (znan po Fourierovih vrstah in transformaci-

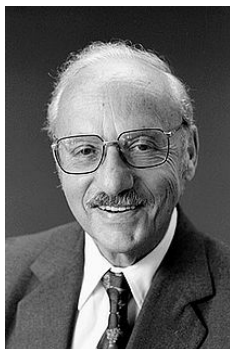
jah). Fourier je leta 1826 objavil članek, v katerem je predstavil metodo za reševanje linearnega sistema neenakosti. Kasneje je Motzkin našel podobno eliminacijsko metodo, ki se imenuje Fourier-Motzkinova eliminacija. S sistemi neenakosti so se ukvarjali tudi Vallé Poussin, Gyula Farkas in Hermann Minkowski.

Leta 1939 je Leonid V. Kantorovich napisal članek o linearnem programiranju, ki pa je zaradi takratnih političnih razmer ostal neznan do leta 1960. Prav tako so ostali strogo zaupni tudi članek Tjallina C. Koopmansa iz leta 1942 o linearnem programiranju, članek istega avtorja iz leta 1947 o problemu razvoza in članek Franka L. Hitchcocka prav tako o problemu razvoza. Leta 1928 je znameniti matematik John von Neumann napisal pomemben članek o teoriji iger, leta 1944 pa skupaj z Oscarjem Morgensternom knjigo o končnih igrah z vsoto nič za dva igralca.

Velik vpliv na kasnejši razvoj linearnega programiranja pa je imel Wassily Leontief s svojim člankom o modelu ameriške ekonomije (1933).

## Rojstvo metode simpleksov

Kljub zgoraj omenjenim delom štejemo šele leto 1947 za pravi začetek linearnega programiranja. Tega leta je namreč George B. Dantzig odkril metodo simpleksov in od takrat naprej je linearno programiranje doživelo velik vzpon ter se močno razširilo na najrazličnejša področja znanosti in gospodarstva.



Slika 1: George B. Dantzig

Dantzig je bil med 2. svetovno vojno zaposlen pri US Air Force v Pentagonu kot matematični svetovalec. Po koncu vojne je doktoriral na Berkleyu in iskal akademsko službo. Njegova kolega v Pentagonu, D. Hitchcock in M. Wood, sta ga želela zadržati pri Air Forcu, zato sta ga izzvala, naj najde način za mehaniziranje načrtovanja v vojski. To je bil čas hladne vojne, ko

je bila močno prisotna tekmovalnost na področju tehnološke razvitosti. In ravno takšno ozračje je bilo zelo primerno za razvoj optimizacijskih metod, predvsem v vojski. Po drugi strani pa je imel Dantzig na voljo le analogne naprave in računalnike na luknjaste kartice. O elektronskem računalniku so takrat lahko le govorili.

Dantzig je sprejel izziv. Prebral je Leontifovo delo in prav tam je našel največ idej, kako bi realen problem zapisal v obliki linearnega matematičnega modela. Za zahteve vojske je Dantzig potreboval precej bolj dinamičen model, kot ga je predstavil Leontif. Na začetku Dantzig v svojem modelu ni uporabljal kriterijske funkcije, pač pa je optimalno rešitev iskal s pomočjo velikega števila kriterijev, ki so omejili število možnih rešitev. Sredi leta 1947 je dokončno formuliral model, v katerem je uporabil kriterijsko funkcijo.

Predvideval je, da imajo ekonomisti, ki so se ukvarjali s problemom razporejanja končnih sredstev, že kakšen postopek za reševanje takšnih modelov. Zato se je junija leta 1947 srečal s Koopmansom, ki je bil zaposlen pri *the Cowles foundation* na univerzi v Chicagu, in mu predstavil svoje delo. Koopmans Dantzigu sicer ni mogel ponuditi nobenega algoritma, vendar je bilo to srečanje vseeno pomembno za nadaljnji razvoj linearnega programiranja. Koopmans je za modele linearnega programiranja navdušil nekatere mlade ekonomiste, npr. Kennetha Arrowa, Paula Samuelsona, Herberta Simona, Roberta Dorfmana, Herberta Scarfa, itd.

Dantzig se je odločil, da bo sam poiskal metodo za reševanje zastavljenega problema. Pri tem se je spomnil na dogodek iz časa študija, ko je zamudil na predavanje profesorja Jerzyja Neymana. Na tabli je našel napisana dva problema in predvideval, da je to domača naloga. Problema sta se mu zdela sicer nekoliko težja kot običajne naloge, vendar ju je vseeno rešil. Kasneje je izvedel, da sta bila to dva odprta matematična problema. Eden od njiju se je nanašal na Neyman-Pearsonovo lemo. Dantzig je v rešitvi uporabil obstoj Lagrangeovih množiteljev za pol-neskončni linearni program s spremenljivkami, omejenimi med 0 in 1, ki zadoščajo linearnim omejitvam v obliki Lebesgueovega integrala. Sprva je Dantzig na metodo simpleksov gledal s preveč zapletenega geometrijskega vidika, kar ga je nekoliko oviralo pri delu.

Oktobra 1947 se je Dantzig v Princetonu prvič srečal s von Neumannom, ki ga je imel marsikdo za največjega matematika tistega časa. Slovel je predvsem po širini svojega znanja, saj se je ukvarjal z mnogimi področji matematike. Dantzig mu je podrobno razlagal problem logistike v vojski, von Neumann pa ga je nejevoljno prekinil in dejal naj preide k bistvu. Nato mu je Dantzig v manj kot minuti na tablo napisal geometrijsko in algebraično ozadje problema. Von Neumann je bil zadovoljen in je Dantzigu v uri in pol razložil matematično teorijo linearnega programiranja. Takrat se je Dantzig seznanil s pojmom dualnosti v linearnem programiranju in s Farkasevo lemo.

Prav leta 1947 je von Neumann napisal izrek o krepki dualnosti, ki nam ob predpostavki, da obstaja optimalna rešitev začetnega problema, zagotavlja obstoj optimalne rešitve dualnega problema in trdi, da sta optimalni vrednosti obeh problemov enaki. Kasneje je von Neumann Dantzigu predlagal iterativno nelinearno reševanje.



Slika 2: John von Neumann

Leta 1948 je Dantzig ponovno obiskal von Neumanna, takrat pa je srečal tudi Alberta Tuckerja, ki je s svojimi učenci, Haroldom Kuhnom, Davidom Galom in ostalimi, raziskoval teorijo iger, nelinearno programiranje in teorijo dualnosti.

Kmalu po tem obisku je bilo srečanje Društva za ekonometrijo v Wisconsinu, na katerem je Dantzig predstavil svojo idejo linearnega programiranja vplivnim znanstvenikom, npr. Hotellingu, Koopmansu, von Neumannu, itd. Hotelling je Dantziga posmehljivo zavrnil z besedami: »Pa saj vsi vemo, da je svet nelinearen.«

Leta 1949 je potekala prva konferenca o matematičnem programiranju v Chicagu, na kateri so svoje prispevke predstavili vsi pomembnejši znanstveniki s tega področja. Konferenco so poimenovali "Ničti simpozij" in velja za "klasiko" znanja o matematičnem programiranju.

## Dogajanje po letu 1950

Po letu 1950 je bil razvoj linearnega programiranja vse hitrejši. Napredek je omogočal predvsem hiter razvoj računalniške tehnologije. Razmahnila so se tudi druga področja, ki so v povezavi z linearnim programiranjem: nelinearno programiranje, teorija pretokov, celoštevilsko programiranje, stohastično programiranje, komplementarna pivotna teorija, itd. Leta 1954 je William Orchard-Hays napisal prvo komercialno programsko opremo za reševanje linearnih programov. Po letu 1950 so se na univerzah začela pojavljati

predavanja o operacijskih raziskavah in s tem se je začelo širiti tudi znanje o linearnem programiranju.

Leta 1975 sta Koopmans in Kantorovich za svoje prispevke pri optimizacijskih problemih prejela Nobelovo nagrado za ekonomijo. Na presenečenje mnogih med nagrajenci ni bilo Dantziga. To dejstvo je Koopmansa tako pretreslo, da je dal v čast Dantzigu tretjino denarne nagrade inštitutu IIASA (the International Institute for Applied Systems Analysis), kjer sta skupaj delala. Leta 1976 je prejel Nobelovo nagrado za ekonomijo še Leontief za model ameriške ekonomije.

## Vprašanje časovne zahtevnosti

Dolgo časa ni bilo jasno, ali linearni programi sodijo v razred težkih problemov z nepolinomskimi časovnimi zahtevnostmi ali ne. Leta 1970 sta Victor Klee in George Minty našla primer, ki je pokazal, da je klasična uporaba metode simpleksov po pravilu "največjega koeficienta", kakršno je uporabljal tudi Dantzig, eksponentne časovne zahtevnosti. Njun primer se v standardni obliki glasi:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j \\ & \text{p.p.} \\ & \quad (2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j) + x_i \leq 100^{i-1}, \quad i = 1, \dots, n \\ & \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Za ta primer porabi metoda simpleksov  $2^n - 1$  korakov.

Leta 1978 je ruski matematik L. G. Khachian s pomočjo elipsoidne metode dokazal, da sodi linearno programiranje v razred problemov s polinomske časovne zahtevnostjo. Elipsoidno metodo so sicer leta 1972 iznašli Naum Z. Shor, Arkady Nemirovsky in David B. Yudin in jo uporabljali za konveksno programiranje. Elipsoidna metoda je za linearno programiranje v teoriji zelo pomembna, za praktično uporabo pa ni bila najbolj primerna.

Nekaj let kasneje, leta 1984, pa je Narendra Karmarkar napisal Karmarkarjev algoritem, ki temelji na metodi notranjih točk. Z njim je uspel ponovno dokazati polinomske časovne zahtevnosti reševanja linearnih programov. Za razliko od elipsoidne metode je Karmarkarjev algoritem precej uporaben tudi v praktičnih linearnih problemih.

Še danes ostaja odprto vprašanje, ali je mogoče najti algoritem za reševanje linearnih problemov, ki bi bil krepke polinomske časovne zahtevnosti (število korakov, ki jih potrebuje algoritem za reševanje problema, je odvisno samo od števila spremenljivk in omejitev, ne pa tudi od velikosti podatkov).

## Literatura

- [1] R. Cottle, E. Johnson, R. Wets. George B. Dantzig (1914 - 2005) *Notices of The AMS*, zv. 54, št. 3.
- [2] J. K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, A. Schrijver, uredniki. History of mathematical programming, A collection of personal reminiscences, North Holland, 1991.
- [3] [http://en.wikipedia.org/wiki/Linear\\_programming](http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_programming)
- [4] [http://en.wikipedia.org/wiki/George\\_Dantzig](http://en.wikipedia.org/wiki/George_Dantzig)