

Računalništvo 3 + Kombinatorična optimizacija: 4. izpit

12. februar 2009

Čas reševanja: 100 minut

Naloga 1 [25 točk]

Dani so naslednji slovarji:

Slovar A:

$$\begin{array}{r} x_2 = 6 - 4x_1 + x_3 + x_5 \\ x_4 = 3 - 2x_1 + x_3 - x_5 \\ x_6 = 1 + x_1 - x_3 - 3x_5 \\ \hline z = -2 + x_1 + 2x_3 - 2x_5 \end{array}$$

Slovar B:

$$\begin{array}{r} x_1 = 7 - x_3 - 3x_4 - x_6 \\ x_2 = 11 - x_3 - 5x_4 - 2x_6 \\ x_5 = -2x_3 + 7x_4 - 3x_6 \\ \hline z = 10 - 2x_3 - 3x_6 \end{array}$$

Slovar C:

$$\begin{array}{r} x_2 = 2 + 2x_1 + x_6 \\ x_4 = -2 + x_1 - x_3 - x_6 \\ x_5 = 1 - x_1 + x_3 \\ \hline z = 12 - x_1 + 2x_3 - 2x_6 \end{array}$$

Slovar D:

$$\begin{array}{r} x_2 = 2 - x_1 + 2x_5 - x_6 \\ x_3 = x_1 + x_5 + x_6 \\ x_4 = 4 + 2x_5 - 5x_6 \\ \hline z = 3 + 2x_1 + x_5 - x_6 \end{array}$$

- Za vsakega od slovarjev A, B, C, D ugotovi, ali je dopusten.
- Za vsak dopusten slovar ugotovi, katera bi bila vhodna spremenljivka, katera izhodna in kakšna bi bila nova vrednost kriterijske funkcije, če bi naredili korak metode simpleksov z uporabo pravila najmanjšega indeksa.
- Za vsak dopusten slovar ugotovi, ali je izrojen, ali je končen in ali obstaja spremenljivka, s pomočjo katere lahko iz tega slovarja razberemo, da je ustrezen problem neomejen.
- Za vsak končen slovar poišči vse optimalne rešitve ustreznega linearnega programa.

Naloga 2 [25 točk]

Taborniki iz različnih odredov se z avtomobili nameravajo peljati na daljši izlet. Odredov je n , avtomobilov je m , iz i -tega odreda je prišlo na izlet a_i tabornikov, $i = 1, \dots, n$, v j -tem avtomobilu lahko sedi b_j oseb, $j = 1, \dots, m$. Ker bi se taborniki iz različnih odredov med seboj radi bolje spoznali, bi se v avtomobile radi posedli tako, da v nobenem avtomobilu ne bi bilo dveh tabornikov iz istega odreda. Kako naj se razporedijo v avtomobile?

- (a) Gornjo nalogo o obstoju sedežnega reda zapiši kot problem maksimalnega pretoka. Torej, treba je opisati primerno omrežje (G, s, t, u) in utemeljiti, da v tem omrežju obstaja (s, t) -tok z dano vrednostjo (katero?) od točke s do točke t natanko tedaj, ko je mogoče sestaviti želeni sedežni red tabornikov v avtomobilih. Opiši tudi, kako iz rešitve problema maksimalnega pretoka odčitamo sedežni red.
- (b) Razloži, da sta pogoja

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^m b_i \quad \text{in} \quad a_i \leq m, \quad i = 1, \dots, n,$$

potrebna za obstoj sedežnega reda, ki ustreza zahtevam iz besedila naloge. Ali sta ta dva pogoja tudi zadostna?

- (c) Predpostavimo, da imajo vsi odredi enako članov (število članov označimo z a) in da je v vseh avtomobilih enako sedežev (to število označimo z b). Naj velja še $b \leq n$. Ali sta ob teh predpostavkah pogoja iz točke (b) zadostna za obstoj želenega sedežnega reda?

Naloga 3 [25 točk]

Naj bo G usmerjen graf. Množica točk $U \subseteq V(G)$ je *pokritje ciklov* grafa G , če vsak usmerjen cikel v G vsebuje vsaj eno točko iz U .

Problem POKRITJE CIKLOV kot vhod dobi usmerjen graf G in naravno število k , zanima pa nas, ali v grafu G obstaja množica točk U moči k , ki je pokritje ciklov grafa G .

Dokaži, da je POKRITJE CIKLOV NP-poln problem.

Naloga 4 [25 točk]

Naj bo G enostaven neusmerjen graf in $U \subseteq V(G)$. Podgraf H grafa G je *Steinerjevo drevo* za množico točk U v grafu G , če je H drevo in velja $U \subseteq V(H)$.

Opiši polinomski aproksimacijski algoritem za iskanje Steinerjevega drevesa z najmanj povezavami. Oцени tudi časovno zahtevnost in faktor aproksimacije tvoje rešitve. Dobra rešitev ima kubično časovno zahtevnost in faktor aproksimacije 2.