1. kolokvij iz RAČUNALNIŠTVA 3

8. januar 2008

1. Na voljo imamo tri zdravilne tonike A, B in C. Vsak od njih vsebuje zdravilne učinkovine I, II in III. Vsebnosti učinkovin v tonikih so podane v spodnji tabeli. Z mešanjem tonikov želimo dobiti napitek, ki bo imel vsebnosti učinkovin, kot so navedene v zadnji vrstici tabele. Natančnih vrednosti z mešanjem običajno ni moč doseči, zato za mero kvalitete mešanice vzamemo po absolutni vrednosti največje odstopanje vsebovanosti posamezne učinkovine od predpisane vrednosti. Na primer pri spodnjih podatkih je za mešanico, ki vsebuje enak delež vsakega tonika, ta vrednost enaka $\frac{2}{3}$.

tonik	I	II	III
A	10	2	5
B	15	4	2
C	20	3	3
opt.	15	3	4

Zanima nas, kakšen je delež posameznega tonika v najboljši možni mešanici.

(a) Zapiši gornjo nalogo v obliki linearnega programa.

(b) Ali je napitek, ki ga dobimo tako, da tonike A, B in C zmešamo v razmerju 8 : 3 : 7, optimalen?

Odgovore je treba ustrezno utemeljiti.

2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ in $x^* \in \mathbb{R}^n$, tako da velja $Ax^* = b$ in $x^* \geq 0$. Dokaži naslednjo trditev:

Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ je optimalna rešitev linearnega programa

$$\min \{ c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n,\, x \geq 0,\, Ax = b \}$$

natanko tedaj, ko obstajata taka vektorja $y^* \in \mathbb{R}^m$, $s^* \in \mathbb{R}^n$, da velja:

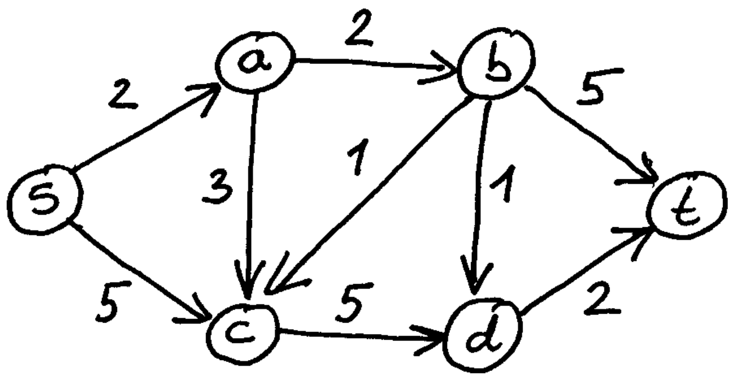
$$s^* \geq 0, \qquad A^T y^* + s^* = c \qquad \text{in} \qquad x_i^* \cdot s_i^* = 0 \ \text{ za } \ i = 1, \ldots, n\,.$$

3. Reši enoparametrično družino matričnih iger, ki je podana s spodnjo matriko (parameter a je poljubno realno število):

$$\begin{bmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & 2a \\ 1 & 2 & 2a \end{bmatrix}.$$

Poiskati je treba vrednost igre ter optimalno strategijo za prvega in za drugega igralca.

4. Na spodnji sliki je podano omrežje za problem največjega pretoka.



(a) Kakšno je pridruženo omrežje, če začnemo z ničelnim (s,t)-tokom in ga najprej povečamo vzdolž povečujoče poti s-a-b-c-d-t in nato še vzdolž povečujoče poti s-c-b-d-t?

(b) Zapiši vse povečujoče poti v pridruženem omrežju iz točke (a).

(c) Poišči maksimalni (s,t)-tok in minimalni (s,t)-prerez za vhodno omrežje.

Vse odgovore je treba primerno utemeljiti.
Čas reševanja: 100 minut. Točkovanje: 25, 25, 25, 25.