Računalništvo 3 + Kombinatorična optimizacija: 2. izpit

31. avgust 2009

Čas reševanja: 100 minut

Naloga 1 [25 točk]

V kamnolomu za gradbeno podjetje pripravljajo tri vrste peska: A, B, C. Peski se med seboj ločijo gledo na vsebost zrn različnih velikosti (podatki so v spodnji tabeli):

pesek	mala zrna	srednja zrna	velika zrna	cena za m^3
A	80 %	10 %	10 %	100
B	30 %	50 %	20 %	80
C	10 %	10 %	80 %	50

Za gradnjo je najprimernejši pesek, sestavljen iz 50 % malih, 30 % srednjih in 20 % velikih zrn. Standardi dopuščajo, da sestava nekoliko odstopa od optimalne, in sicer je malih zrn lahko $40-60$ %, srednjih $25-35$ % in velikih $15-25$ %. Vsak odstotek odstopanja od optimalne sestave podraži gradnjo za 5 evrov pri vsakem kubičnem metru uporabljenega peska.

Kakšno mešanico peskov A, B in C naj podjetje uporabi, da bodo stroški gradnje čim manjši? Nalogo zapiši v obliki linearnega programa. Na kratko pojasni pomen posameznih spremenljivk in vlogo posameznih omejitev.

Naloga 2 [25 točk]

Dana sta matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in vektor $c \in \mathbb{R}^n$. Za vektor $b \in \mathbb{R}^m$ z $LP(b)$ označimo linearni program

$$\min\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}\,.$$

(a) Naj bo $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m$ množica tistih vektorjev b, za katere ima linearni program $LP(b)$ optimalno rešitev. Dokaži, da je množica $\mathcal{D}$ konveksna. (Opomba: prazna množica je konveksna po definiciji.)

(b) Naj bo $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ preslikava, ki vektorju $b \in \mathcal{D}$ priredi optimalno vrednost linearnega programa $LP(b)$. Dokaži, da je funkcija f konveksna.

Naloga 3 [25 točk]

Polni dvodelni graf $K_{5,5}$ ima povezave utežene tako, kot določa spodnja matrika (parametra a in b sta poljubni realni števili):

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 10 & 5 & 15 \\ 3 & a & 8 & b & 10 \\ 10 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 12 & 8 \\ 5 & 9 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Poišči najtežje popolno prirejanje v tem grafu. (Poiskati je treba prirejanje in njegovo težo.)

Naloga 4 [25 točk]

Za vsakega od naslednjih treh problemov ugotovi, ali je v razredu P in ali je v razredu NPC.

(i) Problem ENA POT kot vhod dobi poljuben neusmerjen graf G, zanima pa nas, ali v grafu G obstaja pot dolžine 2009.

(ii) Problem DVATISOČDEVET POTI (I) kot vhod dobi poljuben neusmerjen graf G, zanima pa nas, ali je točke grafa G moč pokriti z 2009 po točkah disjunktnimi potmi. (Opomba: če bi pokrivali samo z eno potjo, bi to bila ravno Hamiltonova pot.)

(iii) Problem DVATISOČDEVET POTI (II) kot vhod dobi povezan neusmerjen graf G, zanima pa nas, ali je točke grafa G moč pokriti z 2009 po točkah disjunktnimi potmi.