1. kolokvij iz RAČUNALNIŠTVA 3

12. februar 2009

1. Dani so naslednji slovarji:

Slovar A:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & 6 & - & 4x_1 & + & x_3 & + & x_5 \\
x_4 & = & 3 & - & 2x_1 & + & x_3 & - & x_5 \\
x_6 & = & 1 & + & x_1 & - & x_3 & - & 3x_5 \\
\hline
z & = & -2 & + & x_1 & + & 2x_3 & - & 2x_5
\end{array}$$

Slovar B:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & 7 & - & x_3 & - & 3x_4 & - & x_6 \\
x_2 & = & 11 & - & x_3 & - & 5x_4 & - & 2x_6 \\
x_5 & = & & - & 2x_3 & + & 7x_4 & - & 3x_6 \\
\hline
z & = & 10 & - & 2x_3 & & & - & 3x_6
\end{array}$$

Slovar C:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & 2 & + & 2x_1 & & & + & x_6 \\
x_4 & = & -2 & + & x_1 & - & x_3 & - & x_6 \\
x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 & & \\
\hline
z & = & 12 & - & x_1 & + & 2x_3 & - & 2x_6
\end{array}$$

Slovar D:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & 2 & - & x_1 & + & 2x_5 & - & x_6 \\
x_3 & = & & + & x_1 & + & x_5 & + & x_6 \\
x_4 & = & 4 & & & + & 2x_5 & - & 5x_6 \\
\hline
z & = & 3 & + & 2x_1 & + & x_5 & - & x_6
\end{array}$$

(a) Za vsakega od slovarjev A, B, C, D ugotovi, ali je dopusten.

(b) Za vsak dopusten slovar ugotovi, katera bi bila vhodna spremenljivka, katera izhodna in kakšna bi bila nova vrednost kriterijske funkcije, če bi naredili korak metode simpleksov z uporabo pravila najmanjšega indeksa.

(c) Za vsak dopusten slovar ugotovi, ali je izrojen, ali je končen in ali obstaja spremenljivka, s pomočjo katere lahko iz tega slovarja razberemo, da je ustrezen problem neomejen.

(d) Za vsak končen slovar poišči vse optimalne rešitve ustreznega linearnega programa.

2. Dokaži, da za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in vsak vektor $b \in \mathbb{R}^m$ velja natanko ena od spodnjih trditev:

(a) $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b$;

(b) $\exists y \in \mathbb{R}^m : (y \ge 0 \land A^T y = 0 \land b^T y = -1)$.

3. Taborniki iz različnih odredov se z avtomobili nameravajo peljati na daljši izlet. Odredov je n, avtomobilov je m, iz i-tega odreda je prišlo na izlet a_i tabornikov, $i = 1, \ldots, n$, v j-tem avtomobilu lahko sedi b_j oseb, $j = 1, \ldots, m$. Ker bi se taborniki iz različnih odredov med seboj radi bolje spoznali, bi se v avtomobile radi posedli tako, da v nobenem avtomobilu ne bi bilo dveh tabornikov iz istega odreda. Kako naj se razporedijo v avtomobile?

(a) Gornjo nalogo o obstoju sedežnega reda zapiši kot problem maksimalnega pretoka. Torej, treba je opisati primerno omrežje (G, s, t, u) in utemeljiti, da v tem omrežju obstaja (s,t)-tok z dano vrednostjo (katero?) od točke s do točke t natanko tedaj, ko je mogoče sestaviti želeni sedežni red tabornikov v avtomobilih. Opiši tudi, kako iz rešitve problema maksimalnega pretoka odčitamo sedežni red.

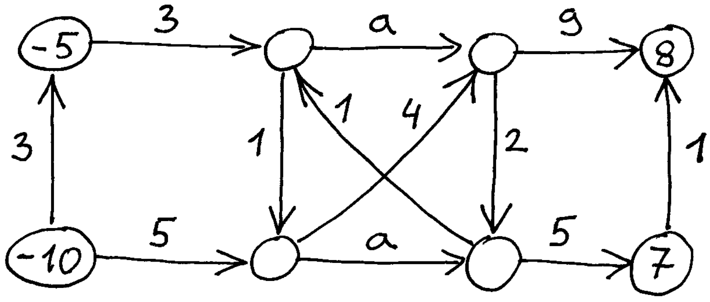
(b) Razloži, da sta pogoja

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \;\le\; \sum_{i=1}^{m} b_i \qquad \text{in} \qquad a_i \le m,\ i = 1, \ldots, n,$$

potrebna za obstoj sedežnega reda, ki ustreza zahtevam iz besedila naloge. Ali sta ta dva pogoja tudi zadostna?

(c) Predpostavimo, da imajo vsi odredi enako članov (število članov označimo z a) in da je v vseh avtomobilih enako sedežev (to število označimo z b). Naj velja še $b \le n$. Ali sta ob teh predpostavkah pogoja iz točke (b) zadostna za obstoj želenega sedežnega reda?

4. Poišči najcenejši razvoz v spodnjem omrežju. Določi tudi ceno dobljenega razvoza. Parameter a je poljubno realno število.



Vse odgovore je treba primerno utemeljiti.
Čas reševanja: 100 minut. Točkovanje: 25, 25, 25, 25.