



Izbirni predmeti na univerzitetnih študijskih programih 1. stopnje  
Oddelka za matematiko FMF

Študijsko leto 2023/24



## Seznam izbirnih predmetov v letu 2023/24

### 2. letnik

| Predmet                         | Izvajalec | Semester |
|---------------------------------|-----------|----------|
| Afina in projektivna geometrija | Vavpetič  | poletni  |
| Algebrائيčne krivulje           | Cimprič   | poletni  |
| Programiranje 2                 | Pretnar   | poletni  |
| Uvod v geometrijsko topologijo  | Strle     | poletni  |

### 3. letnik

#### Strokovni izbirni predmeti

| Skupina | Predmet                             | Izvajalec  | Semester |
|---------|-------------------------------------|------------|----------|
| B1      | Matematično modeliranje             | Žagar      | poletni  |
|         | Numerična linearna algebra          | Plestenjak | poletni  |
| B2      | Diskretna matematika 2              | Klavžar    | poletni  |
|         | Optimizacija 1                      | Žitnik     | zimski   |
|         | Podatkovne strukture in algoritmi 1 | Iršič      | zimski   |
|         | Teorija kodiranja in kriptografija  | Žitnik     | poletni  |
| B       | Algebra 3                           | Moravec    | poletni  |
|         | Elementarna geometrija              | Strle      | zimski   |
|         | Elementarna teorija števil          | Jezernik   | poletni  |
|         | Finančna matematika 1               | Košir      | poletni  |
|         | Izbrane teme iz analize podatkov    | Todorovski | poletni  |
|         | Osnove podatkovnih baz              | Vidali     | poletni  |
|         | Slučajni procesi 1                  | Bernik     | poletni  |
|         | Teorija iger                        | Vidmar     | zimski   |
|         | Uvod v diferencialno geometrijo     | Saksida    | zimski   |

#### Splošni izbirni predmeti – Obštudijske dejavnosti

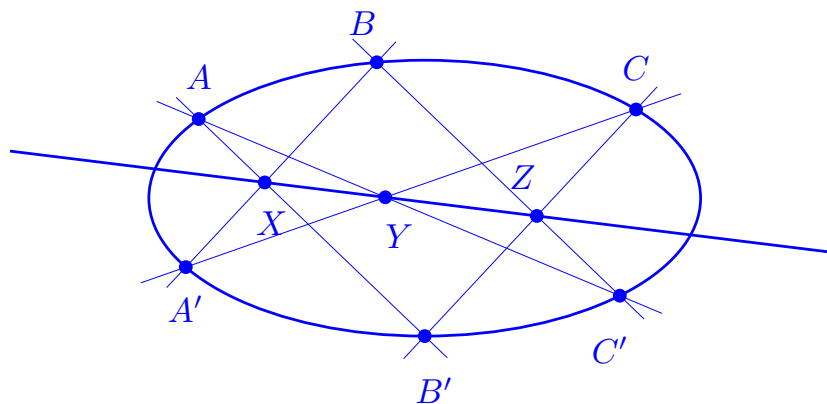
| Predmet                 | Izvajalec         | Semester |
|-------------------------|-------------------|----------|
| Bridž                   | Drinovec Drnovšek | zimski   |
| Prostovoljna učna pomoč | Kobal             | oba      |

# Afina in projektivna geometrija

Aleš Vavpetič

## Vsebina in cilji predmeta

Afini prostori, afine transformacije, osnovni izrek afine geometrije. Projektivni prostori, dualnost, vložitev afine geometrije v projektivno, kolineacije in projektivnosti, osnovni izrek projektivne geometrije, projektivno ogrodje, dvorazmerje, harmonična četverka, perspektivnost. Stožnice v projektivni ravnini. Pol in polara, dvorazmerje na stožnici, Pascalov izrek, klasifikacija stožnic.



Pascalov izrek

## Povezanost z drugimi predmeti

Pogoj za vpis je opravljen izpit iz predmeta Algebra I.

Predmet ni pogoj za ostale predmete na 1. ali 2. stopnji študija matematike.

## Izpitni režim

Pisni del izpita sestoji iz dveh testov in pisnega izpita. Testa sta vredna vsak 10% končne ocene, pisni izpit pa 80% končne ocene. Na vsakem testu, ki bo trajal le nekaj minut, bo le preverjanje razumevanja teorije. Po uspešno opravljenem pisnem izpitu sledi še ustni izpit.

## Literatura

- A. Vavpetič: Afina in projektivna geometrija [Elektronski vir], Ljubljana, 2011.
- T. Košir, B. Magajna: Transformacije v geometriji, DMFA-založništvo, Ljubljana, 1997.
- I. Vidav: Afina in projektivna geometrija, DMFA-založništvo, Ljubljana, 1981.
- M. Berger: Geometry I, Springer, Berlin, 2004.
- E. G. Rees: Notes on Geometry, Springer, Berlin-New York, 2005.

# Algebraične krivulje

Jakob Cimprič

## Vsebina in cilji predmeta

Algebraična krivulja je množica rešitev enačbe  $p(x, y) = 0$ , kjer je  $p$  polinom v dveh spremenljivkah. Nekaj malega smo se o njih naučili že v prvem letniku. Tu bomo znanje precej nadgradili. Poudarek je na povezavi med geometrijo in algebro. Predvidena snov je:

- Afine algebraične krivulje. Nerazcepnost in povezanost.
- Projekktivno zaprtje. Presečna večkratnost med krivuljo in premico. Bezoutjeva lema.
- Tangente. Singularnosti.
- Polare in Hessove krivulje.
- Dualna krivulja. Plückerjeva formula.
- Racionalne krivulje. Stožnice.
- Kubične krivulje.
- Izrek o rodu in stopnji nesingularne krivulje.

Študij algebraičnih krivulj predstavlja uvod v algebraično geometrijo, ki se ukvarja s sistemi polinomskih enačb v več spremenljivkah. Študij algebraičnih objektov povezanih z algebraičnimi krivuljami je motivacija za dovršen del komutativne algebre. Študij racionalnih točk na algebraičnih krivuljah je pomemben v teoriji števil. Algebraične krivulje nad končnimi obsegi so zelo uporabne v kriptografiji.

## Povezanost z drugimi predmeti

Potrebovali in nadgrajevali bomo znanje predmetov Algebra 1 in Analiza 1. Navezovali se bomo tudi na snov predmetov Algebra 2 in Splošna topologija. Predmet je dobra osnova, ni pa pogoj, za predmet Uvod v algebraično geometrijo na 2. stopnji. Koristi tudi pri predmetu Komutativna algebra na 2. stopnji.

## Izpitni režim

Ocena iz vaj: dva kolokvija ali pisni izpit. Ocena iz predavanj: ustni izpit - pogoj za pristop je pozitivna ocena iz vaj.

## Literatura

- R. Bix: Conics and Cubics, a concrete introduction to algebraic curves, Springer Verlag, New York, 2006.
- G. Fisher: Plane algebraic curves, AMS, Providence, 2001.
- C. G. Gibson: Elementary Geometry of Algebraic Curves, Cambridge Univ. Press, mbridge, 1992.
- K. Hulek: Elementary Algebraic Geometry, AMS, Providence, 2003.
- M. Reid: Undergraduate Algebraic Geometry, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

## Programiranje 2

### Matija Pretnar

#### Vsebina in cilji predmeta

Pri predmetu se bomo učili nizkonivojskega programiranja, namenjenega pisanju računsko intenzivnejših programov (npr. vizualizacije, simulacije, mrežni protokoli), pri katerih si iz računalnika želimo iztisniti čim več, ne da bi pri tem žrtvovali pravilnost izračunov. Predvidena vsebina predmeta je sledeča:

- osnove programskega jezika Rust,
- statični tipi, polimorfizem/generiki, algebraski tipi,
- objektno programiranje, enkapsulacija, dedovanje,
- upravljanje s pomnilnikom, lastniški sistem, izjeme,
- sočasno in vzporedno programiranje, niti, asinhrona funkcije,
- napredna orodja za razvoj programske opreme, testiranje, sprotna integracija, paketi.

#### Povezanost z drugimi predmeti

Zaželeno, a neobvezno, so izkušnje s programskim jezikom, ki ima statične tipe, polimorfizem in algebrasko tipe, na primer OCaml, ki se ga bomo učili pri predmetu Programiranje 1.

#### Izpitni režim

Pisni izpit iz programskega jezika Rust ter projektna naloga.

#### Literatura

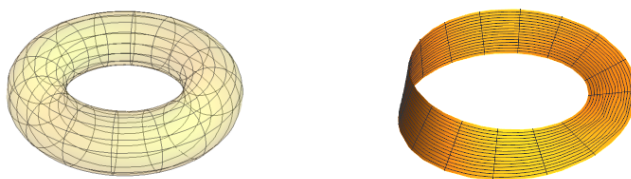
- S. Klabnik, C. Nichols, *The Rust programming language*, <https://doc.rust-lang.org/book/>, No Starch Press, Inc., 2018.

# Uvod v geometrijsko topologijo

Sašo Strle

## Vsebina in cilji predmeta

Prvi del predmeta je namenjen eni najpomembnejših konstrukcij topoloških prostorov – *kvocientnim prostorom*. Kvocientni prostor nastane iz danega prostora z identifikacijo (»lepljenjem«) nekaterih točk tega prostora; pri tem v nastalem prostoru proglasimo za bližnje vse točke, ki so si bile blizu v prvotnem prostoru. Lepljenje je pomemben način konstrukcije *ploskev* (na sliki sta prikazana torus in Möbiusov trak) in razumevanje teh je eden od pomembnih ciljev predmeta.



Naslednji sklop rezultatov je posvečen lastnostim podmnožic *evklidskih prostorov*  $\mathbb{R}^n$  – to so prostori  $n$ -teric realnih števil, opremljeni z običajno razdaljo. *Brouwerjev izrek o negibni točki* zagotavlja obstoj negibne točke poljubne zvezne preslikave enotske krogle v  $\mathbb{R}^n$  vase; v primeru  $n = 1$  je krogla interval in rezultat sledi iz izreka o vmesni vrednosti, kot ste spoznali pri Analizi 1, že pri  $n = 2$  pa trditev ni nazorno jasna in dokaz zahteva drugačne prijeme. Omenimo še *Jordanov izrek*, katerega trditev – da ravnina, ki jo prerežemo vzdolž enostavne sklenjene krivulje, razpade na natanko dva kosa – se sicer zdi nazorno jasna, ni pa tako lahko dokazljiva.

Pot do prej omenjenega cilja – klasifikacije sklenjenih ploskev, katere namen je poiskati predstavnike homeomorfnoštnih razredov sklenjenih ploskev (primeri teh so sfera, torus, projektivna ravnina in Kleinova steklenica) – vodi preko teorije *mnogoterosti*, ki so »višjerazsežne ploskve«. Pri razlikovanju ploskev si bomo pomagali z *Eulerjevo karakteristiko*, ki je primer *topološke invariante*.

## Povezanost z drugimi predmeti

Pogoj za opravljanje izpita (ne pa za opravljanje obveznosti med semestrom) je opravljen izpit iz predmeta Splošna topologija. Predmet ni pogoj za ostale predmete na 1. ali 2. stopnji študija matematike, bo pa znanje vsebin tega predmeta v pomoč študentom, ki bodo na 2. stopnji poslušali predmeta Algebraična topologija 1 in 2 ali predmete, ki obravnavajo gladke ploskve oziroma mnogoterosti (Analiza na mnogoterostih, Diferencialna geometrija, Liejeve grupe, Riemannove ploskve).

## Izpitni režim

Dva kolokvija ali pisni izpit in ustni izpit.

## Literatura

- J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- J. Mrčun, *Topologija*, IPMR **44**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.
- J. Munkres, *Topology, a first course*, Prentice Hall, New Jersey, 1975.
- J. Smrekar in A. Vavpetič, *Rešene naloge iz geometrijske topologije*, UP **18**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2014.
- J. Vrabec, *Kvocientni prostori*, spletno gradivo, na voljo v Spletni učilnici predmeta.
- S. Strle, *Izbrane teme iz geometrijske topologije*, spletno gradivo, na voljo v Spletni učilnici predmeta.

# Matematično modeliranje

Emil Žagar

## Vsebina in cilji predmeta

Najbrž ste že naleteli na matematični problem, ki se ga preprosto predstavi, njegova rešitev pa je trd oreh tudi za spretno matematike. Pri matematičnem modeliranju pogosto naletimo na take primere. Glavne naloge s katerimi se srečamo so zapis problema v ustrezni matematični obliki, izpeljava rešitve in (pogosto) implementacija v kakšnem programskem okolju, ki omogoča numerične izračune, testiranje, grafične prikaze, ... Pri predmetu Matematično modeliranje se bomo ukvarjali z nekaj izbranimi problemi takega tipa: diskretna verižnica, zvezna verižnica, brahistohrona, posplošeni in inverzni problem brahistohrone, statistične simulacije in Bézierjeve krivulje.

## Povezanost z drugimi predmeti

Predmet povezuje znanja iz mnogih predmetov na prvi stopnji študija. Poleg osnov iz analize in linearne algebre je zaželeno še poznavanje numeričnih metod ter optimizacije.

## Izpitni režim

Med semestrom študenti dobijo dve domači nalogi, ki ju implementirajo v Matlabu in se preverjata v obliki kviza na računalniku. Uspešno opravljeni kvizi štejejo do 20% končne ocene. Pisni izpit je v obliki kviza s pomočjo računalnika, ustni izpit pa zagovor individualnega projekta. Slednji dve obveznosti štejeta do 80% končne ocene.

## Literatura

- E. Zakrajšek, *Matematično modeliranje*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2004.
- B. Plestenjak, *Razširjen uvod v numerične metode*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2015.

# Numerična linerna algebra

Bor Plestenjak

## Vsebina in cilji predmeta

Praktična uporaba matematike običajno vsebuje numerično računanje, kjer iz začetnih številskih podatkov, matematičnega modela in formul, izračunamo rezultat s čim več točnimi decimalkami. Mnogo matematičnih problemov, primer je npr. računanje ničel polinoma stopnje 5 ali več, se ne da rešiti analitično, temveč le numerično. V času računalnikov smo na to kar pozabili, saj lahko enostavne probleme zgornjih oblik rešimo že s sodobnimi žepnimi računalni. Za zapletene primere to ne zadošča in slepa uporaba računalnika nas lahko pripelje do rezultatov, ki so na prvi pogled v redu, v resnici pa povsem napačni.

V takih primerih nas lahko reši numerična matematika, ki se ukvarja z razvojem in analizo numeričnih metod za reševanje matematičnih problemov. Osnove bomo spoznali v 1. semestru pri predmetu *Uvod v numerične metode*, *Numerična linearna algebra* pa je nadgradnja, ki se ukvarja s problemi, v katerih nastopajo matrike. Podrobneje bomo obravnavali:

- Reševanje simetričnih in posplošenih problemov lastnih vrednosti. Kot zgled bomo videli, kako je uspeh podjetja Google povezan z učinkovitim računanjem lastnih vektorjev.
- Računanje in uporabo singularnega razcepa, ki je eno najmočnejših orodij za reševanje občutljivih sistemov linearnih enačb. Videli bomo, kako ga npr. uporabimo za hitro delovanje spletnih brskalnikov, odpravljanje šuma na fotografijah in razpoznavanje števil.
- Osnove računanja z večdimenzionalnimi matrikami (tenzorji). Uporaba tenzorjev in aproksimacija s tenzorji nizkega ranga je nepogrešljivo orodje pri obdelavi velikih količin podatkov.

Za prikaz algoritmov bomo uporabljali program Matlab, kjer lahko s pomočjo enostavnega programskega jezika tudi sami sprogramiramo svoje metode.

## Povezanost z drugimi predmeti

Pred opravljanjem ustnega izpita morate opraviti *Uvod v numerične metode*, pisni izpit in kvize pa lahko delate neodvisno od tega. Predmet ni pogoj, koristi pa pri predmetih *Iterativne numerične metode v linearni algebri* in *Numerične metode za linearne sisteme upravljanja* na 2. stopnji.

## Izpitni režim

Režim: 3 pisni izpiti (80% pisne ocene), 2 kviza (20% pisne ocene), ustni izpit.

## Literatura

- B. Plestenjak, *Razširjen uvod v numerične metode*, DMFA–založništvo, Ljubljana, 2015.
- J.W. Demmel, *Uporabna numerična linearna algebra*, DMFA, Ljubljana, 2000.
- L. Elden: *Matrix Methods in Data Mining and Pattern Recognition*, SIAM, Philadelphia, 2007.
- G. H. Golub, C. F. Van Loan: *Matrix Computations*, 4th edition, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 2013.

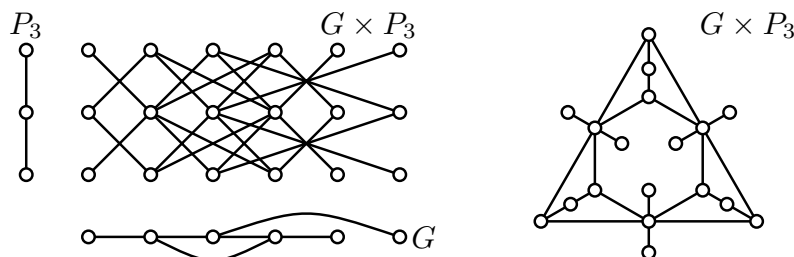
# Diskretna matematika 2

Sandi Klavžar

## Vsebina in cilji predmeta

Pomen diskretne matematike se je v zadnjih nekaj desetletjih močno povečal, glavni razlog je njena izjemna uporabnost. Cilj predmeta je predstaviti širino in globino diskretne matematike ter tudi povezave z drugimi matematičnimi področji. Seznam predvidenih vsebin:

- Delno urejene množice (dimenzija delne urejenosti; Dilworthov in Spernerjev izrek).
- Teorija načrtov (načrti in  $t$ -načrti; ciklične konstrukcije načrtov in Fisherjeva neenakost).
- Pólyeva teorija (permutacijske grupe; ciklični indeks permutacijske grupe; število neekvivalentnih barvanj).
- Ramseyjeva teorija (Ramseyjev izrek in Ramseyjeva števila; Erdős-Szekeresov izrek in grafovski Ramseyjeva števila).
- Simetrijske lastnosti grafov (vozliščno- in povezavno-tranzitivni grafi; Cayleyevi grafi).
- Produkti grafov (trije osnovni produkti; povezanost in razdalja; enoličnost faktorizacije kartezičnega produkta).



## Povezanost z drugimi predmeti

Potrebno je poznavanje linearne algebre ter kombinatorike in teorije grafov v obsegu predmeta Diskretna matematika 1.

## Izpitni režim

2 kolokvija ali izpit iz vaj, ustni izpit iz teorije.

## Literatura

- N. L. Biggs, *Discrete Mathematics, 2nd Edition*, Clarendon Press, Oxford, 2002.
- R. Hammack, W. Imrich, S. Klavžar, *Handbook of Product Graphs*, CRC Press, Boca Raton, 2011.
- J. H. van Lint, R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- E. R. Scheinerman, *Mathematics: A Discrete Introduction*, Brooks/Cole, Pacific Grove, 2005.

# Optimizacija 1

Arjana Žitnik

## Vsebina in cilji predmeta

Optimizacijski problemi sodijo med najpogostejše matematične probleme, ki jih srečujemo v praksi. Posamezniki, gospodarske družbe, državne institucije, različne organizacije – vsi želijo(-mo) kaj maksimizirati (na primer dobiček, izkoristek, proizvodnjo, prodajo, zadovoljstvo, oceno itd.) ali pa minimizirati (na primer stroške, tveganje, porabo časa, porabo energije, porabo materiala, škodljive vplive na okolje itd.). Optimizacijske probleme bomo modelirali v matematičnem jeziku in se natančneje seznanili predvsem z reševanjem linearnih optimizacijskih problemov.

Kratek opis vsebine:

- Vrste optimizacijskih problemov.
- Linearno programiranje.
- Matrične igre.
- Problem najcenejšega razvoza.
- Problem največjega pretoka.
- Optimalno razporejanje opravil.
- Lokalna optimizacija.

## Povezanost z drugimi predmeti

Za uspešno spremljanje predmeta je nujno znanje osnov linearne algebre, pridobljeno pri predmetu *Algebra 1*. Zaželeno je tudi poznavanje osnovnih pojmov teorije grafov (*Diskretna matematika 1*).

Pri *Optimizaciji 1* je poudarek na modeliranju problemov in izpeljavi algoritmov, zato se dobro dopolnjuje s predmetom *Podatkovne strukture in algoritmi 1*, kjer se študenti seznanijo tudi z ustreznimi podatkovnimi strukturami in osnovnimi postopki, ki pridejo prav za praktično implementacijo algoritmov (za tiste, ki jih to zanima).

Nadaljevanje predmeta na 2. stopnji predstavljajo predmeti *Optimizacija 2*, *Izbrana poglavja iz optimizacije* in *Optimizacija v financah*.

## Izpitni režim

- 2 kolokvija (ali pisni izpit) iz nalog,
- ustni izpit iz teorije,
- 2 domači nalogi.

## Literatura

- V. Chvátal: *Linear Programming*, Freeman, New York, 1983.
- J. Matoušek, B. Gärtner: *Understanding and Using Linear Programming*, Springer, 2007.
- B. H. Korte, J. Vygen: *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*, 5. izdaja, Springer, Heidelberg, 2012.

# Podatkovne strukture in algoritmi 1

Vesna Iršič

## Vsebina in cilji predmeta

Spoznali bomo osnovne podatkovne strukture in z njimi povezane algoritme, ki se uporabljajo pri programiranju. Seznanili se bomo z matematično analizo pravilnosti ter časovne in prostorske zahtevnosti algoritmov.

Obravnavali bomo naslednje teme:

- Algoritmi, podatkovne strukture, časovna zahtevnost.
- Tabela, sklad, vrsta, seznam.
- Deli in vlada: binarno iskanje, urejanje z zlivanjem, Strassenov algoritem, rešitev rekurzivnih enačb, hitro urejanje, mediana, itd.
- Sestopanje.
- Dinamično programiranje: najdaljše naraščajoče podzaporedje, Levenshteinova razdalja, množenje več matrik, 0/1-nahrbtnik, problem trgovskega potnika, itd.
- Predstavitve grafov in omrežij. Osnovni algoritmi na grafih: pregledi, topološko urejanje, Floyd-Warshallov algoritem, Dijkstrov algoritem (kopice), Bellman-Fordov algoritem, itd.

## Povezanost z drugimi predmeti

Priporočljivo je predznanje s predmetov Diskretna matematika 1 in Programiranje 1.

## Izpitni režim

Domače naloge in pisni izpit iz vaj; izpit iz teorije.

## Literatura

- S. Dasgupta, C. H. Papadimitriou, and U. V. Vazirani, *Algorithms*, McGraw-Hill, 2008.
- J. Erickson, *Zapiski za Undergraduate Algorithms*, 2012.
- J. Kleinberg, E. Tardos, *Algorithm design*, Pearson/Addison-Wesley, 2005.
- J. Kozak, *Podatkovne strukture in algoritmi*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 1997.

# Teorija kodiranja in kriptografija

Arjana Žitnik

## Vsebina in cilji predmeta

Kodiranje in kriptografija se uporabljata za zagotavljanje varne in zanesljive komunikacije ter hranjenje podatkov. Najbolj znana uporaba kriptografije je šifriranje podatkov, vendar je to le majhen delček sodobne kriptografije. Kode za popravljanje napak uporabljamo vsak dan, na primer pri uporabi mobilnega telefona, brskanju po spletu, skeniranju kode QR...

Pri teoriji kodiranja bomo obravnavali naslednje teme: informacija in entropija; Shannonova teorija; kodi za popravljanje napak; zgornje meje za število kodnih besed; linearni, Hammingovi, ciklični in Reed-Solomonovi kodi, kodi QR.

Pri kriptografiji bomo obravnavali čim več tem izmed: klasična kriptografija; simetrični kriptosistemi; asimetrični kriptosistemi (kriptosistemi z javnim ključem), predvsem RSA; zgoščevalne funkcije; digitalni podpisi; distribucija in izmenjava ključev; identificiranje, overjanje in delitev skrivnosti; generiranje psevdo-naključnih števil; dokazi z ničelno informacijo.

Cilji predmeta so:

- spoznati osnovne tehnike sodobne kriptografije in teorije kodiranja, s poudarkom na matematični teoriji;
- spoznati osnove kriptanalize: analiza varnosti in “razbijanje” preprostih kriptosistemov;
- razviti kritičnost pri uporabi komunikacijskih kanalov in računalniških sistemov s stališča informacijske varnosti.

## Povezanost z drugimi predmeti

Predmet je izrazito interdisciplinaren, z uporabo matematičnih metod iz različnih področij: linearne algebre, teorije števil, algebre (grupe, končni obsegi, polinomi,...), verjetnostnega računa (diskretne slučajne spremenljivke, pogojna verjetnost in Bayesova formula) in računalništva (algoritmi, podatkovne strukture, računska zahtevnost).

Za uspešno spremljanje predmeta je potrebno, da je študent opravil oziroma posluša predmete *Algebra 1*, *Algebra 2*, *Uvod v programiranje* in *Verjetnostni račun* (začetni del). Vse potrebno predznanje bomo sproti obnovili.

Predmet ni pogoj za ostale predmete na 1. ali 2. stopnji študija matematike.

## Izpitni režim

- 2 kolokvija (ali pisni izpit) iz nalog,
- ustni izpit,
- ena obvezna domača naloga, ki jo bo potrebno rešiti s pomočjo računalnika. Za sprotno delo bodo na voljo še neobvezne domače naloge, s katerimi si bo mogoče izboljšati oceno iz vaj - točke iz domačih nalog se prištejejo k točkam pisnega izpita.

## Literatura

- Douglas Stinson, Maura Paterson: *Cryptography : Theory and Practice*, 4rd edition, Chapman & Hall/CRC, 2018.
- Johannes Buchmann: *Introduction to cryptography*, 2nd edition, Springer, 2004.
- D. Welsh: *Codes and Cryptography*, Oxford University Press, Oxford, 1988.

## Algebra 3

Primož Moravec

### Vsebina in cilji predmeta

Algebra je matematična veda, ki se ukvarja s študijem abstraktnih matematičnih struktur, kot so grupe, kolobarji, polja, idr. V predmetu bomo nadgradili znanje o osnovnih algebrskih strukturah, ki ste jih spoznali pri Algebri 2.

Na začetku se bomo ukvarjali s teorijo polj. Osnovni cilj bo Galoisova teorija razširitev, vrhunec pa Galoisov izrek o rešljivosti polinomskih enačb z radikali. Tukaj bomo videli, zakaj ne obstajajo “preproste” formule za reševanje polinomskih enačb stopnje pet ali več. Pri teoriji kolobarjev bomo spoznali pojem modula, ki je nadgradnja pojma vektorskega prostora, pri čemer polje skalarjev zamenjamo s poljubnim kolobarjem. Čeprav sta si definiciji modula in vektorskega prostora na prvi pogled zelo podobni, se zaradi prisotonosti kolobarjev kmalu pojavijo ključne razlike. Obdelali bomo osnovne konstrukcije z moduli ter osnovne razrede modulov. Poleg tega bomo spoznali še s teorijo kategorij. Te nam nudijo jezik, s pomočjo katerega lahko poenotimo študij matematičnih struktur. Kategorije so bile vpeljane v algebrski topologiji, danes pa se pojavljajo tudi v teoretičnem računalništvu in drugod. Na koncu bomo spoznali elementarne lastnosti upodobitev grup, teorije, ki med drugim igra pomembno vlogo v kombinatoriki in matematični fiziki.

### Povezanost z drugimi predmeti

Potrebno predznanje je opravljen predmet Algebra 2. Znanje tega predmeta je priporočljivo ne le za algebrske predmete na 2. stopnji (Komutativna algebra, Nekomutativna algebra, Teorija grup, itd.), ampak koristi tudi pri tako raznolikih predmetih kot so Kombinatorika, Logika, Algebrski topologija, Algebrska geometrija, idr.

### Izpitni režim

Dve domači nalogi, izpit

### Literatura

- M. Brešar, Uvod v algebro, DMFA, 2018.
- P. M. Cohn: Algebra, 2nd edition, Wiley & Sons, 1982.
- T. W. Hungerford: Algebra, Springer, New York-Berlin, 2003.

# Elementarna geometrija

Sašo Strle

## Vsebina in cilji predmeta

Predmet je posvečen osnovnim idejam in rezultatom elementarne (ravninske) geometrije. Cilj predmeta je podati slušatelju širše in globlje razumevanje obravnavanih tem, ki je pomembno za srednješolske učitelje matematike, zanimivo pa tudi za vse ostale. Klasična geometrija je po eni strani zaradi svoje aksiomatične zgradbe in lepote vzorčni model matematične teorije, po drugi pa predstavlja zgodovinske in tudi vsebinske temelje matematike. Poleg aksiomatske zgradbe (nevtralne) ravninske geometrije in nekaterih posebej lepih in zanimivih rezultatov klasične evklidske geometrije predmet obravnava tudi osnove hiperbolične in sferične ravninske geometrije.

Posebej izpostavimo nekaj tem: zgodovinski pomen aksioma o vzporednicah, defekt trikotnika, inverzija, modeli hiperbolične ravnine, Eulerjeva premica, krožnica devetih točk, Simsonova premica, Fermatov in Fagnanov problem, Morleyjev izrek, Cevov in Menelajev izrek, Apolonijeva krožnica in Apolonijev problem, tlakovanja in Platonska telesa.

## Povezanost z drugimi predmeti

Posebno predznanje ni potrebno, snov se delno naslanja na srednješolsko poznavanje ravninske evklidske geometrije. Predmet je sicer v veliki meri neodvisen od drugih predmetov.

## Izpitni režim

Pisni izpit in ustni izpit.

## Literatura

- N. Altshiller-Court, *College Geometry*, 2nd edition, Dover Publications, Mineola, New York, 2007.
- B. Artmann, *Euclid – The Creation of Mathematics*, Springer, New York, 2001.
- H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*, Dover Publications, New York, 1982.
- M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: development and history*, Freeman, New York, 1973.
- S. Lang in G. Murrow, *Geometry: a high school course*, Springer, New York, 1983.
- D. Pagon, *Osnove evklidske geometrije*, DZS, Ljubljana, 1995.

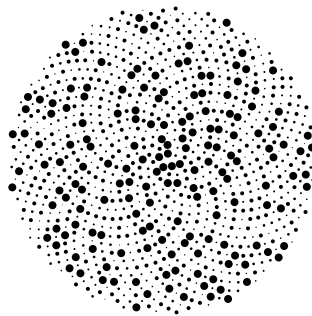
# Elementarna teorija števil

Urban Jezernik

## Vsebina in cilji predmeta

V teoriji števil študiramo predvsem cela števila in funkcije celih števil. Predmet Elementarna teorija števil je prijazen uvod v to vejo matematike, pri katerem uporabljamo le elementarna orodja. Osvojitev osnov teorije števil je eden od temeljev splošne matematične izobrazbe.

Začeli bomo s pregledom osnovnih lastnosti faktorizacije števil, vključno z lastnostmi praštevil in njihovo porazdelitvijo. Nadaljevali bomo z uvajanjem koncepta kongruenc in reševanjem enačb po praštevilskih moduli. Razložili bomo praktično uporabo te teorije v kriptografiji, kjer je šifriranje ključnega pomena. Nato bomo raziskovali, kako natančno lahko aproksimiramo realna števila z racionalnimi, kar nas bo popeljalo v svet verižnih ulomkov. Uporabili bomo različne metode za reševanje diofantskih enačb, tako linearnih kot kvadratnih. Za zaključek bomo spremenili perspektivo in se namesto reševanja enačb osredotočili na predstavljanje števil s pomočjo kvadratnih form.



## Povezanost z drugimi predmeti

Potrebovali bomo le zelo osnovno analizo (osnovni pojmi iz Analize 1) in algebro (osnovni pojmi iz Algebre 1 in 2) ter osnovno znanje programiranja (znanje iz Uvoda v programiranje bo dovolj). Predmet je dobra osnova za nekoliko bolj napreden predmet Teorija števil, ponujen kot izbirni predmet na 2. stopnji.

## Izpitni režim

Pri predmetu ne bo kolokvijev. Na koncu semestra bomo pisali pisni izpit. Po opravljenem pisnem izpitu bomo imeli tudi ustni izpit. Za pristop k ustnemu izpitu bo potrebno med semestrom opraviti kratko programersko nalogo, tema bo po izbiri.

## Literatura

- K. H. Rosen, *Elementary number theory*, Pearson Education, 2011.
- J. H. Silverman, *A friendly introduction to number theory*, Pearson Education, 2006.
- A. Granville, *Number Theory Revealed*, American Mathematical Society, 2019.

# Finančna matematika 1

Tomaž Košir

## Vsebina in cilji predmeta

- Osnovni in izvedeni finančni instrumenti: obveznice, terminske pogodbe in terminski posli, zamenjave, opcije.
- Model finančnega trga z enim in več obdobji: pogojne terjatve, zakon ene cene, pojem arbitraže, cenovni funkcional, zamenjava numerarja, ekvivalentna martingalska verjetnost, osnovna izreka vrednotenja premoženja, izvedbene strategije in zaščita.
- Binomski model: predstavitev modela, vrednotenje v binomskem modelu. Black-Scholesova formula.
- Black-Scholesova parcialna diferencialna enačba, grški parametri, upravljanje s tveganji.
- Časi ustavljanja. Optimalni časi ustavljanja. Pogojne terjatve ameriškega tipa.
- Osnove portfeljske teorije: Markowitzev model.

Cilj predmeta je spoznati matematične modele za vrednotenje izvedenih finančnih instrumentov in zaščito pred tveganji v diskretnem času. Znanja so uporabna predvsem v finančnem sektorju gospodarstva, (npr. v investicijskih družbah, bankah, zavarovalnicah, podjetjih za distribucijo elektrike in drugih energentov), raznih ustanovah državne uprave, itd.

## Povezanost z drugimi predmeti

Pri predmetu bomo potrebovali osnove verjetnostnega računa, zato je pogoj vsaj sočasno obiskovanje predmeta Verjetnost 1 (FM) ali Verjetnost (M) ali Verjetnostni račun in statistika (IŠRM). Predmet ni pogoj, je pa priporočen, za predmete Finančna matematika 2, Finančna matematika 3, Aktuarska matematika in nekatere izvedbe predmeta Izbrana poglavja iz finančne matematike, ki sodijo v skupino M5 na drugi stopnji.

## Izpitni režim

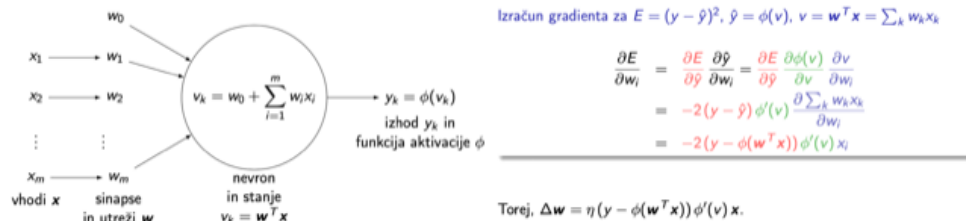
3 kratki testi iz teorije, 2 kolokvija ali pisni izpit in ustni izpit.

## Literatura

- J. Hull. Options, futures and other derivatives. Prentice Hall. 7. izdaja, 2009.
- A. Toman. Rešene naloge iz finančne matematike 1: Finančni instrumenti, DMFA založništvo, Ljubljana, 2016.
- P. Koch Medina, S. Merino. Mathematical finance and probability: a discrete introduction. Birkhäuser, 2003.
- S. E. Shreve. Stochastic calculus for finance 1: The binomial asset pricing model. Springer, 2005.
- D. Stefanica. A primer for the mathematics of financial engineering. 2. izdaja, FE Press, New York, 2011.
- D.G. Luenberger. Investment science. Oxford University Press, 1998.
- B. Steiner. Mastering financial calculations: A step-by-step guide to the mathematics of financial market instruments. 2. izdaja, Financial Times Prentice Hall, 2007.

# Izbrane teme iz analize podatkov

Ljupčo Todorovski



## Vsebina in cilji predmeta

Pravi naslov predmeta bi lahko bil *Uvod v strojno učenje*. Spoznali bomo osnovne in napredne algoritme strojnega učenja ter matematičnih ozadij delovanja teh algoritmov. Naučili se bomo uporabljati algoritme strojnega učenja za gradnjo napovednih modelov iz podatkov. Vaje bodo namenjene praktični analizi izbranih podatkovnih množic z algoritmi strojnega učenja. Cilj vaj je spoznati prednosti in slabosti različnih algoritmov na konkretnih problemih gradnje napovednih modelov, kar nam pomaga se naučiti izbrati najbolj ustrezen algoritem strojnega učenja za podano podatkovno množico. Bolj specifično, predmet obravnava naslednje vsebine:

- (1) *Uvod v strojno učenje*: nadzorovano in nenadzorovano učenje, podatki, modeli, funkcije izgube, napovedna napaka modela in njena dekompozicija, problem pretiranega prilaganja modelov učnim podatkom, izbira napovednega modela.
- (2) *Algoritmi strojnega učenja*: nadzorovano učenje, linearni modeli, najbližjih sosed, odločitvena drevesa, metoda podpornih vektorjev, nevronske mreže; ter nenadzorovano učenje, razvrščanje primerov v skupine in iskanje pogostih množic postavk.
- (3) *Analiza podatkov s strojnim učenjem*: analiza napovedne napake modela, obravnava različnih tipov podatkov, problem praznega mnogorazsežnostnega prostora, izbira in sestavljanje vhodnih spremenljivk, obravnava manjkajočih podatkov.

## Povezanost z drugimi predmeti

Potrebna so predznanja iz osnov programiranja v Python-u ter osnov linearne algebre, analize in diskretne matematike. Predmet se navezuje na predmet *Napredno strojno učenje* na 2. stopnji.

## Izpitni režim

Sprotne domače naloge analize podatkov z algoritmi strojnega učenja (50% ocene) in ustni izpit (50% ocene).

## Literatura

- G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani *An Introduction to Statistical Learning*, druga izdaja, Springer, 2021. Dostopna na <https://www.statlearning.com/>.
- M. Kuhn in K. Johnson *Applied Predictive Modeling*, Springer, 2013.
- P. Flach, *Machine Learning: the Art and Science of Algorithms that Make Sense of Data*, Cambridge University Press, 2012.

# Osnove podatkovnih baz

Janoš Vidali

## Vsebina in cilji predmeta

Pri predmetu se bomo spoznali z osnovami načrtovanja, delovanja in uporabe podatkovnih baz. Podatkovne baze so neizogibno orodje povsod, kjer moramo shranjevati in upravljati večje količine podatkov. Osredotočili se bomo predvsem na relacijske podatkovne baze (SQL), dotaknili pa se bomo tudi ostalih tipov podatkovnih baz (NoSQL). Predstavili bomo tudi načine uporabe relacijskih podatkovnih baz iz programskega jezika Python. Poudarek bo na praktičnem delu, ki pa bo v okviru predavanj podprto tudi z ustreznimi matematičnimi teorijami, na katerih slonijo relacijske podatkovne baze.

## Povezanost z drugimi predmeti

Za sodelovanje pri predmetu mora imeti študent opravljen uvodni predmet iz programiranja (npr. Uvod v programiranje) in nekaj smisla za uporabo računalnikov.

## Izpitni režim

V sklopu vaj in domačih nalog se bodo v okviru manjših skupin tekom leta izvajali semestrski projekti, ki bodo vključevali določitev problema (izziva) in zahtev, načrtovanje baze in povezave s preprostim spletnim (in/ali mobilnim) vmesnikom, implementacijo ter ustrezno dokumentiranje. Skupinsko delo bo podprto s pomočjo modernih sistemov za kontrolo verzij (`git`). Aktivnost, učinkovitost in znanje članov ekipe se bo ocenjevalo sproti, končna ocena predmeta pa bo temeljila tudi na zaključnem ustnem zagovoru in predstavitvi.

## Literatura

- R. Ramakrishnan, J. Gehrke: *Database Management Systems, 3rd edition*, McGraw-Hill, Boston, 2003.
- T. Mohorič: *Podatkovne baze, 2. dopolnjena izdaja*, BI-TIM, Ljubljana, 2002.
- Priročniki za uporabo podatkovnih baz.

# Slučajni procesi 1

Janez Bernik

## Vsebina in cilji predmeta

Pri predmetu Slučajni procesi 1 se spoznamo s procesi štetja. To so procesi v zveznem času, ki štejejo prihode nekih dogodkov (potresov, popravil strojev, zavarovalniških zahtevkov...) in so po svoji naravi najbolj enostavni primeri procesov v zveznem času, hkrati pa tudi gradniki za bolj komplicirane procese. Proces, ki jih obravnavamo, so: homogeni Poissonov proces, nehomogeni Poissonov proces, prenovitveni procesi in prenovitveni procesi z zaostankom, kjer nas pri zadnjih dveh zanima predvsem dolgoročno vedenje. Hkrati se tudi seznanimo z nekaterimi pojmi, kot so naravna filtracija procesa in časi ustavljanja in z njimi povezanimi lastnostmi.

Cilji predmeta so večplastni. Po eni strani se študenti seznanijo s procesi, ki so neposredno uporabni pri modeliranju raznih pojavov, hkrati pa dobijo tudi osnovo za nadaljni študij slučajnih procesov. Utrdijo se osnovni pojmi verjetnosti, kot pogojna porazdelitev in pogojno matematično upanje, ki so jih študenti že spoznali. Velik poudarek je namenjen reševanju vaj in konkretnim nalogam, kjer se obravnavana teorija lahko uporabi.

## Povezanost z drugimi predmeti

Potrebno je predznanje iz verjetnosti in analize, kot ga pridobijo študenti matematike, finančne matematike ali fizike do konca prvega semestra tretjega letnika. Nekatera osnovna dejstva iz teorije mere, kot na primer izreka o dominirani in monotoni konvergenci, ki jih potrebujemo, navedemo sproti. Predmet se neposredno navezuje tako na bolj teoretične predmete na magistrskem študiju (Verjetnost 2, Slučajni procesi 2) kot tudi bolj praktične (Aktuarska matematika - neživljenska zavarovanja, Finančna matematika 2, Modeliranje s slučajnimi procesi).

## Izpitni režim

Pozitivno oceno iz vaj je mogoče dobiti bodisi s kolokviji ali pisnim izpitom in je pogoj za pristop k ustnemu izpitu.

## Literatura

- R. Durrett, *Essentials of Stochastic Processes*, 3rd. ed., Springer, 2016.
- S. Resnick, *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhauser, 1992.

# Teorija iger

## Matija Vidmar

### Vsebina in cilji predmeta

V igri mora izbrati vsak igralec svojo strategijo, uspeh posameznega igralca pa je odvisen od izbranih strategij vseh igralcev. Pomemben koncept v igri je ravnovesje: skupina strategij, pri kateri noben posamezen igralec nima motivacije, da bi spremenil svojo strategijo.

Obstajajo različne vrste iger za različne situacije, v odvisnosti od tega, ali vsi igralci izberejo strategijo hkrati ali po vrstnem redu, ali imajo vsi igralci isto informacijo o stanju, ali je vsota dobičkov vseh igralcev enaka nič, ali lahko igralci podpišejo sporazume itd. Zaradi tega bomo pri predmetu spoznali različne vrste iger: strateške, ekstenzivne, Bayesove, matrične, kooperativne itd. Pri vsaki igri bomo obravnavali motivacijo, definicijo in ustrezen koncept ravnovesja.

Igre so koristne za razumevanje obnašanja igralcev in analiziranje strategij na več področjih, npr. v ekonomiji in politiki. Kot vsi matematični modeli imajo svoje prednosti in slabosti.

### Povezanost z drugimi predmeti

Pri predmetu bomo uporabili osnovno verjetnost. Del predmeta uporabi koncepte linearnega programiranja. Razložili bomo, kar bo potrebno, pri čemer pa bodo študentje, ki so se že spoznali z linearnim programiranjem, imeli manjšo prednost.

Predmet je priporočljiv za predmet Izbrana poglavja iz teorije iger na 2. stopnji.

### Izpitni režim

Predmet se izvaja v obliki 3+3. Med študenti, ki opravljajo ta predmet kot izbirni ali obvezni ni razlik v obveznostih. Obveznosti: pisni izpit iz vaj (ali dva kolokvija, ki štejeta kot en pisni izpit) ter pisni izpit iz teorije.

### Literatura

- Martin J. Osborne: Introduction to Game Theory.
- Thomas S. Ferguson: Game Theory.
- Bernhard von Stengel: Game Theory Basics.

# Uvod v diferencialno geometrijo

Pavle Saksida

## Vsebina in cilji predmeta

Diferencialna geometrija z analitičnimi orodji obravnava metrične lastnosti gladkih mnogoterosti. Osnovni, geometrijsko netrivialni primeri mnogoterosti so ukrivljene ploskve v  $\mathbb{R}^3$ . Temeljni diferencialno geometrični pojmi so metrika, geodetska krivulja in ukrivljenost. Metrika vzpostavlja pojem razdalje med dvema točkama, geodetske krivulje so najkrajše krivulje med pari točk, ukrivljenost pa lahko po eni strani razumemo kot matematično formalizacijo intuitivnega pojma oblike, po drugi strani pa je tesno povezana s pojmom pospeška. Študent spozna najpomembnejše lastnosti osnovnih pojmov diferencialne geometrije in povezave med njimi. Proti koncu tečaja dokažemo nekaj rezultatov, ki opisujejo povezavo med ukrivljenostjo in topološkimi invariantami mnogoterosti.

Diferencialna geometrija je ena od osnovnih matematičnih disciplin. Pomembna je tako v teoriji, kot tudi v uporabi. Spekter uporab diferencialne geometrije je izjemno širok in sega od računalniškega oblikovanja, računalniškega vida, procesiranja slik in drugih signalov do relativnostne teorije, kvantne teorije polja, dinamičnih sistemov, navadnih in parcialnih diferencialnih enačb.

## Povezanost z drugimi predmeti

Predmet Uvod v diferencialno geometrijo se vsebinsko dopolnjuje z drugimi geometrijskimi predmeti, zlasti s predmetom Algebraične krivulje, s topološkimi predmeti, in s kompleksno analizo. Predmet je torej zanimiv za študente, ki jih zanima geometrija, analiza, topologija, matematična fizika in tudi različne veje računalniške grafike, procesiranja slik in podobne discipline.

Vse potrebno predznanje je vsebovano v predmetih Analiza 1, Analiza 2 in Algebra 1. Drugih pogojev ni. Znanje vsebin predmeta bo močno koristilo študentom, ki bodo v nadaljevanju študija poslušali predmete Diferencialna geometrija, Analiza na mnogoterostih, Algebraična topologija 1 in 2, Kompleksna analiza, Riemannove ploskve, Liejeve grupe, Računalniško podprto (geometrijsko) oblikovanje.

## Izpitni režim

Izpit je sestavljen iz ustnega in pisnega dela. Pisni del je možno opraviti z dvema kolokvijema.

## Literatura

- A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer Verlag, 2010
- M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- I. Vidav: *Diferencialna geometrija*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 1989

## **Bridž**

**Barbara Drinovec Drnovšek**

### **Vsebina in cilji predmeta**

Bridž je družabna igra za 4 igralce oziroma 2 para, ki se igra z 52 igralnimi kartami. Sestavljena je iz dveh delov: iz licitacije in odigravanja. Pri licitaciji skušamo čim bolj natančno napovedati, koliko vzetrov bova s partnerjem dobila in katera barva bo adut. Vidimo le svoje karte, s partnerjem se sporazumevamo preko napovedi. V drugem delu igre poskuša par, ki je zmagal v licitaciji, osvojiti vsaj toliko vzetrov, kot jih je napovedal. Nasprotni par se trudi, da bi to preprečil.

Pri igri se razvija logično mišljenje, sposobnost hitrega odločanja in prilagajanje odločitev na podlagi vedno novih informacij, pa tudi socialne spretnosti in partnerski odnos.

Pri predmetu bomo spoznali osnovna pravila minibridža in bridža. Naučili se bomo osnov licitacije. Informacije, ki jih pridobimo iz licitacije, bomo uporabili pri odigravanju. Spoznali bomo temeljne prvine odigravanja: impas, ekspas, blokiranje in deblokiranje, ohranitev komunikacije, onemogočanje komunikacije med nasprotniki. Posvetili se bomo atakiranju in uporabi dovoljenih načinov komunikacije med partnerjema pri igri v obrambi.

Odigrali bomo en turnir v minibridžu in dva v bridžu.

### **Povezanost z drugimi predmeti**

Študenti morajo biti vpisani na prvo oziroma drugo stopnjo študijskega programa Univerze v Ljubljani. Predznanje ni potrebno.

### **Izpitni režim**

Ocenjuje se z ocenama »opravil«/»ni opravil«. Za pristop k izpitu je pogoj 75-odstotna prisotnost pri predmetu. Z dvema uspešno odigranima turnirjema študent opravi izpit.

## Prostovoljna učna pomoč

### Damjan Kobal

#### Vsebina in cilji predmeta

Mladi iz socialno ogroženih družin so pogosto manj uspešni pri študijskem delu in potrebujejo učno pomoč, ki pa si je ne morejo privoščiti. Po drugi strani lahko za take otroke prav učni uspeh predstavlja motivacijo in edino upanje za izhod iz negativnih socialno-družinskih ciklov.

V sodelovanju z relevantnimi humanitarnimi organizacijami kot na primer *Zveza prijateljev mladine Ljubljana Moste-Polje* ali *Slovenska filantropija* študent izvede približno 30 ur individualnih ali skupinskih inštrukcij ali drugega spremljevalnega dela mladih v okviru organiziranih aktivnosti ustreznih humanitarnih organizacij. O vsebini in obsegu dela študent pripravi enostavno poročilo.

#### Povezanost z drugimi predmeti

Študenti morajo biti vpisani na prvo oziroma drugo stopnjo študijskega programa Univerze v Ljubljani. Predznanje ni potrebno.

#### Izpitni režim

Po uvodnih informiranjih in ustrezni koordinaciji z relevantnimi humanitarnimi organizacijami študent začne izvajati individualno učno pomoč in druge oblike dela z mladimi.

Ocena »opravił«/»ni opravił« se podeli na podlagi ustrezne angažiranosti.