UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za matematiko in fiziko

Izbirni predmeti na magistrskih in doktorskih študijskih programih Oddelka za matematiko FMF

Študijsko leto 2025/26

Ljubljana, 2025

Kazalo

Seznam izbirnih predmetov v letu 2025/26

IPXY v imenu predmeta pomeni, da predmet sodi med izbrana poglavja. Ob tej oznaki je naveden opisni/vsebinski podnaslov predmeta.

Jezik izvajanja predmeta:
- slo – slovenski
- ang – angleški
- slo/ang – če so pri predmetu tuji študenti, praviloma angleški
- jez + jez – če sta jezikovni opciji ločeni s +, se prva nanaša na predavanja, druga na vaje

Skupina	Predmet	Izvajalec	Sem.	Jezik
M1	Kompleksna analiza Specialne funkcije Teorija mere Teorija operatorjev	Bessonov Kostenko Kandić Bessonov	2. 2. 1. 1.	ang ang slo ang
M2	IPAlg: Teorija upodobitev Kombinatorika Nekomutativna algebra	Jezernik Konvalinka Smertnig	2. 2. 1.	slo + ang slo + ang ang
M3	Algebraična topologija 1 Algebraična topologija 2 Uvod v algebraično geometrijo	Strle Pavešić Šivic	1. 2. 1.	slo/ang slo slo/ang + ang
M4	Numerična aproksimacija in interpolacija Numerične metode za linearne sisteme upravljanja Numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb	Knez Plestenjak Grošelj	1. 2. 2.	slo slo/ang slo
M5	Aktuarska matematika – neživljenjska zavarovanja Bayesova statistika Časovne vrste Finančna matematika 2 IPFM: Upravljanje s tveganji Numerične metode v finančni matematiki Verjetnost 2	Hieber, Albrecher Smrekar Basrak Perman Dacorogna Zanette Smrekar	2. 2. 2. 1. 2. 2. 1.	ang slo/ang + ang ang slo ang ang slo
R1	IPRM: Logika v računalništvu IPRM: Teorija kategorij IPRM: Verjetnostne metode v računalništvu Kardinalna aritmetika (Teorija množic) Matematika z računalnikom Računska zahtevnost Teorija programskih jezikov	Simpson Swan Cabello Simpson Bauer Cabello Pretnar	2. 1. 1. 2. 1. 1. 2.	ang ang slo/ang ang slo ang slo
O	Astronomija Delovna praksa Matematika v industriji	Zwitter Žitnik, Košir Knez	oba oba oba	slo slo slo

Skupina	Predmet	Izvajalec	Sem.	Jezik
IŠRM A	Logika v računalništvu Verjetnostne metode v računalništvu	Simpson Cabello	2. 1.	ang slo/ang
IŠRM B	IPNM: Numerična aproksimacija in interpolacija IPNM: Numerične metode za linearne sisteme upravljanja IPNM: Numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb Kombinatorika 2 Matematika z računalnikom Računska zahtevnost Teorija programskih jezikov	Knez Plestenjak Grošelj Konvalinka Bauer Cabello Pretnar	1. 2. 2. 2. 1. 1. 2.	slo slo/ang slo slo + ang slo ang slo

Opisi teh predmetov so pri ustreznih predmetih iz skupin M1–M5 in R1.

Seznam ostalih predmetov, ki se bodo izvajali na FMF v letu 2025/26 in jih lahko izberejo študenti 2. stopnje

Skupina:
- S – splošni izbirni predmet
- OD – obštudijska dejavnost
- DOK – doktorski predmet

Skupina	Predmet	Izvajalec	Sem.	Jezik
S	Projektno delo	Knez	oba	slo
OD	Bridž Prostovoljna učna pomoč	Drinovec Drnovšek Kobal	1. oba	slo slo
DOK	IPAlg: Multiplikativna teorija idealov in teorija faktorizacij IPAna: Hanklovi in Toeplitzovi operatorji IPTop: Vztrajna homologija	Smertnig Bessonov Virk	2. 1. 2.	ang ang ang

V nadaljevanju sledijo vsebinski opisi predmetov, ki so jih pripravili izvajalci. Pomen oznak pri tedenskih urah v opisih predmetov:

- p/v = p ur predavanj in v ur vaj na teden
- $p/s/v$ = p ur predavanj, s ur seminarja in v ur vaj na teden

Seznam temeljnih predmetov na magistrskem študiju

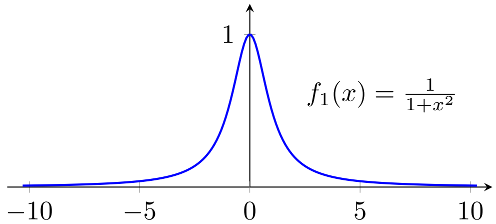
Naslednji predmeti so ključni v svojih skupinah in se praviloma izvajajo vsaki dve leti.

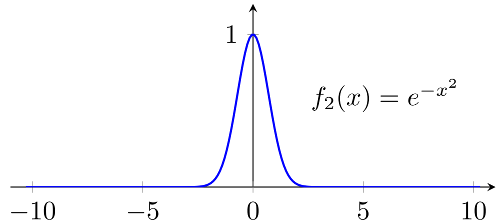
Skupina	Temeljni predmeti
M1 (analiza in mehanika)	Kompleksna analiza Parcialne diferencialne enačbe Teorija mere Uvod v funkcionalno analizo
M2 (algebra in diskretna matematika)	Kombinatorika Komutativna algebra Nekomutativna algebra Teorija grafov
M3 (geometrija in topologija)	Algebraična topologija 1 Analiza na mnogoterostih
M4 (numerična matematika)	Numerična aproksimacija in interpolacija Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje
M5 (verjetnost, statistika, finančna matematika)	Finančna matematika 2 Statistika 2 Verjetnost 2
R1 (računalniška matematika)	Logika v računalništvu Matematika z računalnikom Računska geometrija Verjetnostne metode v računalništvu
O (ostalo)	Matematični modeli v biologiji Astronomija Moderna fizika

Kompleksna analiza

Roman Bessonov

Opis: Oglejmo si dve funkciji realne spremenljivke, katerih grafa sta prikazana spodaj:





Obe funkciji sta sodi, neskončno odvedljivi in padajoča v neskončnosti, njuna grafa pa zelo sta si podobna. Vendar pa njihovi Tailorjevi vrsti

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \qquad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!},$$

kažeta povsem drugačno vedenje: prva vrsta konvergira le za $|x| < 1$, medtem ko druga vrsta konvergira povsod na $\mathbb{R}$. Na grafu funkcije f_1 v bližini točk $x = \pm 1$, kjer se vrsta za f_1 začne divergirati, ni nič posebnega. Da bi videli pravi razlog za divergiranje, moramo definicijo f_1 razširiti na kompleksna števila in poiskati rešitve $z = \pm i$ enačbe $1 + z^2 = 0$ (oba ležita na enotski krožnici $|z| = 1$ v kompleksni ravnini).

Zgornji zgled ponazarja da je “naravna domena” mnogih funkcij realne spremenljivke kompleksna ravnina ali njene odprte podmnožice. Poleg tega, te funkcije po nadaljevanju na kompleksno ravnino pogosto ostanejo odvedljive na novo kompleksno spremenljivko, t.j. so *analitične*. Analitične funkcije imajo veliko pomembnih lastnosti, ki se drastično razlikujejo od lastnosti splošnih funkcij realne spremenljivke.

Pri prvem delu predmeta bomo zbrali standardna teorija in instrumente: diferencialne forme, Cauchyjeva formula, princip argumenta, princip zrcaljenja, Schwarzova lema, Riemannov upodobitveni izrek itd. Ta dejstva so običajno znana iz osnovne analize. Na kratko si bomo ogledali njihove dokaze in si ogledali primere uporabe. V drugem delu se bomo posvetili naprednejši teoriji in dokazali več globokih rezultatov, med drugim Beurlingov izrek o faktorizaciji za omejene analitične funkcije, Caratheodoryjev izrek o razširitvi na splošnih Jordanovih domenah ter Picardov izrek o območju vrednosti analitičnih funkcij.

Literatura:

- J. B. Conway: Functions of one complex variable I, 2nd ed., New York: Springer, 1978.
- T. W. Gamelin: Complex analysis, New York: Springer, 2001.
- W. Rudin: Real and complex analysis, 3rd ed., New York: McGraw-Hill, 1987.

Pričakovano predznanje: Pričakovanega predznanja ni.

Ocenjevanje: Domače naloge, ustni izpit.

Semester: Poletni semester.

Tedenske ure: 2/1/2 (predavanja/seminar/vaje) tedensko.

Jezik: Angleški.

Specialne funkcije

Aleksey Kostenko

Opis: Koncept “specialna funkcija” nima natančne definicije. S praktičnega vidika je specialna funkcija funkcija, ki ni ena od “elementarnih funkcij” (algebraične, trigonometrične funkcije, eksponentna funkcija, logaritemska funkcija in funkcije, konstruirane iz teh funkcij) in je funkcija, o kateri lahko najdemo informacije v številnih knjigah o specialnih funkcijah. Cilj je v tem tečaju obravnavati naslednje teme:

- Klasični ortogonalni polinomi (Čebišev, Gegenbauer, Hermite, Jacobi, Laguerre, Legendre).
- Hipergeometrične funkcije.
- Besselove funkcije.
- Eliptične funkcije.

Večina teh specialnih funkcij se je pojavila v XVIII.–XIX. stoletju pri rešitvah diferencialnih enačb, ki se pojavljajo pri pomembnih problemih matematične fizike. Med številnimi aplikacijami specialnih funkcij se nameravamo osredotočiti na reprezentacije kompaktnih Liejevih grup in njihove uporabe v kvantni mehaniki in tudi na uporabe v nelinearnih valovnih enačbah (npr. KdV in Toda).

Literatura:

- G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- R. Beals and R. Wong, *Special Functions: A Graduate Text*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Representation of Lie Groups and Special Functions, Vol. 1*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

Pričakovano predznanje: Poznavanje potenčnih vrst, integralov in konvergence; osnovno znanje linearne algebre; zaželeno je nekaj poznavanja teorije operatorjev v Hilbertovih prostorih.

Ocenjevanje: pisni in ustni izpit.

Semester: poletni

Tedenske ure: 2/1/2

Jezik: angleški

Teorija mere

Marko Kandić

Opis: Verjetnostni račun je na začetku pretežno preučeval diskretne dogodke s kombinatoričnimi metodami. Leta 1933 je Kolmogorov postavil temelje modernejšega pristopa, ki slonijo na teoriji mere. Mera, kot pojem, je posplošitev pojmov dolžine, ploščine in volumna na poljubne množice.

Pri predmetu bomo najprej vpeljali pojma merljivega prostora in pozitivne mere. Ogledali si bomo osnovne lastnosti in nato konstruirali Lebesgueovo mero na realni osi, ki se na intervalih ujema z njihovo dolžino. Vpeljali bomo pojem merljivosti funkcij in definirali Lebesgueov integral nenegativne merljive funkcije. Definicijo integrala bomo razširili na razred absolutno integrabilnih merljivih funkcij. Izpeljali bomo zelo pomembna Lebesgueova izreka o monotoni in dominirani konvergenci, ki povesta, kdaj lahko zamenjamo limitni proces in integracijo. Definirali bomo dvojni integral in se kot pri Analizi 2a vprašali, kdaj je dvojni integral enak dvakratnima. Na to vprašanje bomo odgovorili s Tonellijevem in Fubinijevem izrekom. Ker se Lebesgueov in Riemannov integral ujemata v primeru Riemannovo integabilne funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, nam Lebesgueova teorija omogoča nova orodja za integracijo Riemannovo integrabilnih funkcij.

V nadaljevanju bomo vpeljali pojma realne in kompleksne mere. Dokazali bomo Lebesgue-Radon-Nikodýmov izrek ter Hahnov in Jordanov razcep realne mere. Srečali se bomo tudi s pojmom L^p-prostorov, ki predstavljajo nepogrešljiv vir Banachovih prostorov v funkcionalni analizi. Nato si bomo ogledali mere na lokalno kompaktnih prostorih. Pri tem bomo dokazali Rieszov izrek o reprezentaciji pozitivnih funkcionalov na $C_c(X)$. Za konec si bomo ogledali še odvajanja mer in funkcij.

Literatura:

- G. B. Folland, *Real analysis: Modern techniques and their applications*, J. Wiley & Sons, New York, 1999.
- B. Magajna, *Osnove teorije mere*, DMFA Založništvo, Ljubljana, 2011.
- W. Rudin, *Real and Complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

Pričakovano predznanje: Linearna algebra in matematična analiza.

Ocenjevanje: Namesto kolokvijev ena domača naloga, ki se upošteva pri oceni. Končna ocena je kombinacija domače naloge (15%), pisnega (50%) in teoretičnega pisnega izpita (35%).

Semester: zimski

Tedenske ure: predavanja in vaje 3/2

Jezik: slovenski

Teorija operatorjev

Roman Bessonov

Opis: Teorija operatorjev pogosto nudi priročen jezik za preučevanje najbolj splošnih lastnosti objektov, ki se pojavljajo v matematiki in matematični fiziki. Eden izmed razlogov za to je temeljna narava pojma linearnega operatorja, drugi pa dejstvo, da je teorija operatorjev dobro razvita in vodi do močnih posledic že ob minimalnih predpostavkah.

Predmet ima dva glavna cilja. Prvi cilj je predstaviti osnovne pojme in dokazati nekatere temeljne izreke, povezane z njimi. Drugi cilj pa je pokazati, kako se splošna teorija uporablja v konkretnih situacijah, ki se pojavljajo na različnih področjih matematike.

Pri predmetu bomo spoznali kompaktni operatorji, invariantni podprostori, fiksne točke, Riesz-Dunfordov funkcijski račun, adjungirani operatorji, spektralni izrek, Fredholmovo teorijo, von Neumann-Schattenovi razredi, sled in determinanto operatorjev na neskončnorazsežnih prostorih. Primeri iz teorije diferencialnih enačb, ergodične teorije, teorije točkovnih procesov in matematične fizike bodo ponazorili vsebino predmeta.

Literatura:

- Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis: An invitation to operator theory, Providence: American Mathematical Society, 2002.
- Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis: Problems in operator theory, Providence: American Mathematical Society, 2002.
- F. Albiac, N. J. Kalton: Topics in Banach space theory, New York: Springer, 2006.
- J. B. Conway: A Course in functional analysis, 2nd ed. - New York: Springer, 1990.
- I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek: Classes of linear operators. Vol. 1, Basel : Birkhäuser, 1990.
- G. K. Pedersen: Analysis now, New York: Springer, 1989.
- H. Radjavi, P. Rosenthal: Simultaneous triangularization, New York: Springer, 2000.
- I. Vidav: Linearni operatorji v Banachovih prostorih, Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, 1982.

Pričakovano predznanje: Pričakovanega predznanja ni.

Ocenjevanje:

- Domače naloge
- Ustni izpit

Semester: Zimski semester.

Tedenske ure: 3 predavanja, 2 vaje tedensko.

Jezik: Angleški.

Izbrana poglavja iz algebre: Teorija upodobitev

Urban Jezernik

Opis: Teorija upodobitev se ukvarja z *linearizacijo* abstraktnih objektov, predvsem grup in njihovih delovanj. Gre za klasično in dobro raziskano vejo matematike, ki ima številne uporabe tudi v drugih znanostih. Dva pomembna cilja, ki ju ta teorija doseže, sta naslednja.

(1) Namesto abstraktne obravnave dano grupo na različne načine uresničimo z obrnljivimi matrikami, kar nam z močnimi orodji linearne algebre omogoča bolj transparenten študij njihovih lastnosti. Tukaj nas zanimajo predvsem najenostavnejši načini predstavitev grup z matrikami.
(2) Mnoge situacije, kjer se pojavljajo grupe prek svojih delovanj, lahko lineariziramo in to linearno strukturo razstavimo na enostavne komponente, ki jih razumemo s pomočjo prejšnje točke.

Pri predmetu bomo najprej vzpostavili temelje teorije upodobitev (osnovne definicije in zgledi, fundamentalne konstrukcije upodobitev). Pokazali bomo, kako se lahko vsaki konkretni upodobitvi približamo, kot da bi jo pogledali pod mikroskopom (videli bomo, da je vsaka sestavljena iz *celic*, vsaka celica pa iz *organelov*). Za tem si bomo ogledali dobro razvito teorijo upodobitev končnih grup (tu bomo pod mikroskopom videli in razumeli čudovito strukturo s pomočjo Fourierove transformacije), podrobneje bomo raziskali upodobitve dveh temeljnih družin končnih grup (simetrične grupe in splošne linearne grupe nad končnim poljem). Ta teorija ima mnogo aplikacij, od katerih bomo izpostavili nekaj sodobnejših (v teoriji števil, kombinatoriki, slučajnih procesih na grupah). Nazadnje bomo obravnavali še nekaj zgledov upodobitev pomembnih družin neskončnih grup (kompaktne grupe ter linearne grupe, zvezne in diskretne).

Literatura:

- U. Jezernik, *Teorija upodobitev*, zapiski predavanj, dostopno na `https://urbanjezernik.github.io/teorija-upodobitev/`, 2025.
- E. Kowalski, *An Introduction to the Representation Theory of Groups*, American Mathematical Society, 2014.
- W. Fulton in J. Harris, *Representation Theory: A First Course*, Springer GTM 129, 2004.
- J. P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer GTM 42, 1977.

Pričakovano predznanje: Potrebno Algebra 2, zaželeno Algebra 3.

Ocenjevanje: Domače naloge, ustni izpit.

Semester: Poletni.

Tedenske ure: 3/2.

Jezik: Slovenski (predavanja) in angleški (vaje).

Kombinatorika / Kombinatorika 2

Matjaž Konvalinka

Opis: Preštevalna kombinatorika je področje diskretne matematike, ki se ukvarja s preštevanjem matematičnih objektov z določenimi lastnostmi. Problemi segajo od zelo lahkih (npr. število permutacij množice z n elementi je $n!$) do (verjetno) nerešljivih (npr. poiskati število neizomorfnih grafov na n točkah). Pri predmetu bomo nadgradili znanje o osnovnih problemih preštevanja (izbori, razčlenitve in razdelitve, dvanajstera pot), q-analogih, Pólyevi teoriji, delno urejenih množicah in Möbiusovi inverziji. Poudarek bo na rodovnih funkcijah in formalnih potenčnih vrstah (algebra formalnih potenčnih vrst, računanje z rodovnimi funkcijami, eksponentna formula, Lagrangeeva inverzija) ter na njihovi uporabi (reševanje rekurzivnih enačb, iskanje povprečij in standardnih deviacij, aproksimacija členov zaporedja).
Pri predmetu bomo predelali veliko večino vsebin, zahtevanih na kombinatoričnem delu magistrskega izpita iz diskretne matematike.

Literatura:

- R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume 1 & 2
- M. Bona, A walk through combinatorics: an introduction to enumeration and graph theory
- H. Wilf, generatingfunctionology

Pričakovano predznanje: Poznavanje osnovnih principov preštevanja (pridobljenega npr. pri predmetu Diskretna matematika 1 na prvostopenjskem študiju Matematike ali Finančne matematike ali pri predmetu Kombinatorika na prvostopenjskem študiju IŠRM).

Ocenjevanje: Izpit iz vaj in izpit iz teorije.

Semester: poletni

Tedenske ure: 3 ure predavanj, 2 uri vaj

Jezik: slovenski na predavanjih, angleški na vajah

Nekomutativna algebra

Daniel Smertnig

Opis: Nekomutativna algebra se ukvarja s preučevanjem nekomutativnih kolobarjev in njihovih modulov. Tipični primeri nekomutativnih kolobarjev so kolobarji operatorjev (kjer množenje predstavlja kompozicijo funkcij), grupne algebre, kolobarji matrik in nekomutativni obsegi. Obravnavane teme vključujejo:

- noetherjeve kolobarje in module,
- polenostavne kolobarje in module ter Wedderburn-Artinov izrek,
- Jacobsonov radikal in Hopkins-Levitzkijev izrek,
- primitivne kolobarje in Jacobsonov izrek o gostoti,
- Krull–Remak–Schmidt–Azumayin izrek (razcep modulov na direktne vsote),
- Maschkejev izrek za grupne algebre,
- centralno enostavne algebre.

Literatura:

- M. Brešar. Introduction to Noncommutative Algebra, Springer, 2014.
- B. Farb, R. K. Dennis. Noncommutative Algebra, Springer, 1993.
- T. Y. Lam. A first course in noncommutative rings, Springer, 1991.
- T. Y. Lam. Lectures on modules and rings, Springer, 1999.

Pričakovano predznanje: Algebra 2 in 3.

Ocenjevanje: Ustno (predavanja) in pisno (vaje). Pisno ocenjevanje vključuje domače naloge.

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: angleški

Algebraična topologija 1

Sašo Strle

Opis: Cilj topologije je razumeti prostore do homeomorfizma natančno, vendar je to v splošnem pretežek problem, saj tega algoritmično ni mogoče narediti niti za sklenjene mnogoterosti (dimenzije vsaj 4). Zato prostore najprej razlikujemo z bolj grobimi relacijami, ki jih še naprej poenostavimo s pomočjo algebraičnih invariant – števil ali bolj kompliciranih algebraičnih objektov, ki jih priredimo prostorom, kot so ovojno število, Eulerjeva karakteristika, fundamentalna grupa ...

Izračun algebraičnih invariant je običajno preprostejši za prostore, ki so sistematično zgrajeni iz preprostih kosov. Ogledali si bomo poliedre (in pripadajoče simplicialne komplekse) ter CW komplekse. Po drugi strani lahko večino algebraičnih invariant prostora definiramo za splošne prostore – primer take invariante je fundamentalna grupa, ki meri, kdaj lahko krožnico v prostoru zvezno deformiramo v točko. To nam da torej podatek o luknjah v prostoru – manjkajoči točki v ravnini, manjkajoči premici ali sklenjeni krivulji v tri-razsežnem prostoru ... S pomočjo fundamentalne grupe lahko npr. vprašanje klasifikacije prostorov v prvem koraku zožimo na vprašanje klasifikacije možnih fundamentalnih grup, od koder sledi zgoraj omenjeni rezultat o nemožnosti efektivne klasifikacije mnogoterosti. Po drugi strani je fundamentalna grupa tesno povezana s krovnimi prostori danega prostora – ta zveza je topološka analogija zvezi med razširitvijo obsega in njeno Galoisovo grupo. Obravnavali bomo tudi homološke grupe prostora (s pripadajočo homološko algebro), ki v grobem merijo, kdaj sfera v prostoru (ne) omejuje.

Izkaže se, da algebra ni le orodje, s katerim dobimo topološke informacije, ampak lahko teorijo uporabimo tudi v drugo smer in dokažemo kak zanimiv algebraični rezultat, npr. da je vsaka podgrupa proste grupe prosta in da je prosta grupa F_n na n generatorjih podgrupa v F_2.

Metode algebraične topologije so pomembne tudi v uporabi, npr. za prepoznavanje karakterističnih lastnosti prostorov, za katere poznamo le množico numeričnih podatkov, ki predstavljajo vzorec točk prostora. To je osnova računske topologije. Na drugi strani obstajajo verzije homologije, s katerimi lahko študiramo lastnosti vloženih podprostorov, npr. homologija Hovanova.

Literatura:

- A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2001; dostopno tudi na `https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`.
- M. J. Greenberg in J. R. Harper, *Algebraic topology – A first course*, The Benjamin/Cummings publishing company, 1981.
- J. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1984.

Pričakovano predznanje: Pričakovano: Splošna topologija in Algebra 2 , zaželeno: Uvod v geometrijsko topologijo (kvocientni prostori in mnogoterosti).

Ocenjevanje: Domače naloge, pisni in ustni izpit.

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: Slovenski, v primeru tujih študentov angleški.

Algebraična topologija 2

Petar Pavešić

Opis: Homotopija, homotopska ekvivalenca, razširitve in dvigi homotopij, homotopska kategorija.

Kohomološke grupe, definicija in osnovne lastnosti, računanje, uporaba. Konstrukcija kohomoloških grup. Kohomološki kolobar.

Homotopske grupe, eksaktna zaporedja para in vlaknenja, homotopski izrez.

Literatura:

- A. Hatcher: Algebraic Topology, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

Pričakovano predznanje: simplicialni in CW-kompleksi, fundamentalna grupa, homologija (okvirno vsebina predmeta Algebraična Topologija 1)

Ocenjevanje: pisni in ustni izpit

Semester: drugi

Tedenske ure: 2/1/2

Jezik: slovenščina

Uvod v algebraično geometrijo

Klemen Šivic

Opis: Osnovni objekti, ki jih bomo obravnavali pri predmetu, so množice rešitev polinomskih enačb. Imenujemo jih raznoterosti. Po eni strani lahko študiramo njihove geometrične lastnosti, kot sta dimenzija in singularne točke. Po drugi strani so raznoterosti tesno povezane z ideali v polinomskih kolobarjih in so nam v pomoč metode iz komutativne algebre. Algebraična geometrija tako povezuje geometrijo in algebro. Pridobljeno znanje bo zato uporabno na mnogih področjih teoretične ali uporabne matematike, tako pri študiju geometričnih objektov, kot pri vseh vsebinah, ki vključujejo reševanje enačb. Algebraična geometrija je uporabna tudi na drugih področjih, na primer v teoretični fiziki.

V moderni algebraični geometriji pa pogosto ni dovolj obravnavati samo raznoterosti. Na primer, komutativnih kolobarjev je bistveno več kot koordinatnih kolobarjev raznoterosti. Zato vpeljemo sheme kot posplošitve raznoterosti. To nam omogoča uporabo geometričnih orodij tudi na drugih področjih, na primer v teoriji števil.

Pri predmetu bomo obravnavali naslednje teme:

- Afine in projektivne raznoterosti, topologija Zariskega, nerazcepnost.
- Hilbertov izrek o ničlah (Nullstellensatz), korespondenca med raznoterostmi in ideali.
- Polinomske, regularne in racionalne preslikave, koordinatni kolobar in kolobarji regularnih funkcij, osnovno o snopih.
- Klasične konstrukcije: Segrejeve in Veronesejeve raznoterosti, determinantne raznoterosti, sekantne raznoterosti, Grassmannove raznoterosti.
- Dimenzija raznoterosti, dimenzija vlaken regularnih preslikav.
- Tangentni prostor na raznoterost, gladke točke, diferencial regularne preslikave, odprava singularnosti (razpih).
- Spekter kolobarja, uvod v sheme.

Literatura:

- D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, varieties, and algorithms*, Springer, 2007.
- A. Gathmann. *Algebraic Geometry.* Class Notes, TU Kaiserslautern, 2021/22, https://www.mathematik.uni-kl.de/ gathmann/class/alggeom-2021/alggeom-2021.pdf
- B. Hassett: *Introduction to algebraic geometry*, Cambridge Univ. Press, 2007.
- J. Harris: *Algebraic Geometry : A First Course,* Springer, 1995.
- K. Hulek: *Elementary Algebraic Geometry,* AMS, Providence, 2003.
- I. Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry I : Varieties in Projective Space*, Springer, 1994.

Pričakovano predznanje: Algebra 1 in 2 s prve stopnje študija matematike. Znanje iz Algebre 3 in Komutativne algebre je koristno, ni pa obvezno. Potrebno znanje iz teh dveh predmetov bomo ponovili. Znanje iz Algebraičnih krivulj je koristno za boljšo geometrijsko predstavo.

Ocenjevanje: Domače naloge med letom, ustni izpit ob koncu semestra.

Semester: zimski

Tedenske ure: 3 ure predavanj, 2 uri vaj

Jezik: predavanja v slovenščini, vaje v angleščini

Numerična aproksimacija in interpolacija

Marjeta Knez

Opis: Predmet obravnava matematična orodja, ki so nepogrešljiva pri aproksimativnem reševanju praktičnih problemov. Spoznamo razrede funkcij, ki so primerni za iskanje aproksimacij, kot so polinomi, odsekoma polinomske funkcije oziroma zlepki, trigonometrični polinomi ipd. Seznanimo se tudi s kriteriji, ki aproksimativne funkcije določajo. Tu izbiramo med optimalnimi shemami, kot so enakomerna aproksimacija s polinomi ali aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov, in preprostejšimi linearnimi pristopi, kot je interpolacija. Spoznamo različne algoritme ter postopke za konstrukcijo aproksimantov ter merila za določanje njihove kvalitete. Med drugim se seznanimo z B-zlepki, ki sestavljajo numerično stabilno bazo prostora odsekoma polinomskih funkcij, to je bazo, katere elementi so nenegativni, imajo lokalni nosilec in tvorijo razčlenitev enote. Predmet je osnova drugim predmetom s področja numerične analize.

Literatura:

- J. Kozak, Numerična analiza, DMFA - založništvo, Ljubljana 2008.
- M. Knez, J. Grošelj, Numerična aproksimacija in interpolacija, zbirka nalog z rešitvami, DMFA - založništvo, Ljubljana 2020.
- S. D. Conte, C. de Boor, Elementary Numerical Analysis, McGraw Hill, New York, 1980.
- D. Kincaid, W. Cheney, Numerical Analysis, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1996.
- C. de Boor, A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag, New York, 2001.

Pričakovano predznanje: Ustrezno znanje iz analize ter poznavanje osnov numerične matematike in Matlaba.

Ocenjevanje: Izpit iz vaj (pisni), izpit iz teorije (pisni ali ustni), dve domači nalogi (v Matlabu), ki se preverjata s kvizi.

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2 (Predmet se bo izvajal s 3 urami predavanj in 2 urama vaj tedensko.)

Jezik: slovenski

Numerične metode za linearne sisteme upravljanja

Bor Plestenjak

Opis: Obravnavali bomo linearne sisteme upravljanja oz. kontrolne sisteme oblike

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

za $t \geq t_0$ z začetnim stanjem $x(t_0) = x_0$. Pri tem je A matrika stanja, B je vhodna, C izhodna in D prehodna matrika, $x(t)$ je vektor stanj, $u(t)$ vhodni in $y(t)$ izhodni signal.

Tako lahko npr. opišemo delovanje klimatske naprave, avtopilota v letalu in drugih sistemov, ki se prilagajajo zunanjim podatkom tako, da se izhodni signal čim bolj ujema z željenim (npr., z nastavljeno temperaturo prostora). Da je to sploh možno, morajo imeti vse lastne vrednosti matrike A negativen realni del.

Poudarek bo na učinkovitih algoritmih za matrične probleme, ki nastopajo na tem področju, a se sicer pojavljajo tudi drugje. Med drugim se bomo ukvarjali z numeričnimi metodami za naslednje probleme:

- računanje eksponentne funkcije matrike $M(t) = e^{At}$ (in drugih funkcij matrik),
- reševanje Ljapunove matrične enačbe $XA + A^T X = C$,
- reševanje Sylvestrove matrične enačbe $XA + BX = C$,
- reševanje Riccatijeve matrične enačbe $XA + A^T X + XBR^{-1}B^T X + Q = 0$.

Ključne besede: Linearni sistem upravljanja, matrika stanja, stabilnost, vodljivost, spoznavnost, odprtozančni in zaprtozančni sistemi, Ljapunova enačba, Sylvestrova enačba, Riccatijeva enačba, stabilizacija sistema.

Literatura:

- B. Plestenjak: Numerične metode za linearne sisteme upravljanja, skripta, 2022.
- B. Plestenjak: Numerične metode za linearne sisteme upravljanja, skripta vaj, 2022.
- P. J. Antsaklis, A. N. Michel: Linear systems, Birkhäuser, Basel, 2006.
- K. J. Åström, R. M. Murray: Feedback systems: an introduction for scientists and engineers, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 2021.
- B. N. Datta: Numerical Methods for Linear Control Systems, Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.

Pričakovano predznanje: obvezni numerični predmeti 1. stopnje.

Ocenjevanje: 2 domači nalogi v obliki kvizov (20%), pisni del izpita (40%), po pozitivni oceni iz skupno domačih nalog in pisnega dela izpita je potrebno opraviti še ustni izpit (40%).

Semester: poletni

Tedenske ure: 3 ure predavanj, 2 uri vaj

Jezik: slovenski ali angleški (odvisno od študentov pri predmetu)

Numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb

Jan Grošelj

Opis: Predmet obravnava snov, ki v uporabno smer nadgrajuje poznavanje matematike na področju reševanja parcialnih diferencialnih enačb. Slušatelje vpelje v numerične metode, njihovo analizo in implementacijo ter jim predstavi praktične probleme, kjer se posamezni pristopi posebej odlikujejo.

Obravnavane bodo naslednje teme: Parcialne diferencialne enačbe. Modelni problemi drugega reda. Enačbe eliptičnega tipa. Poissonova enačba. Diferenčna metoda. Diskretni maksimalni princip in ocena globalne napake. Iterativno reševanje diskretiziranih enačb. Jacobijeva, Gauss–Seidelova in SOR metoda. ADI metoda. Metode podprostorov Krilova. Večmrežne metode. Variacijske metode. Različni tipi metod končnih elementov. Enačbe paraboličnega tipa. Prevajanje toplote. Eksplicitne in implicitne numerične sheme. Crank–Nicolsonova metoda. Konsistenca, stabilnost in konvergenca. Enačbe hiperboličnega tipa. Valovna enačba. Karakteristike, karakteristične spremenljivke. Diferenčna metoda. Courantov pogoj. Konvergenca diferenčnih aproksimacij za modelni primer. Metoda karakteristik. Osnove metode radialnih baznih funkcij.

Predstavljen bo tudi Matlabov paket za osnovno reševanje parcialnih diferencialnih enačb v dveh dimenzijah, `pdeModeler`.

Literatura:

- J. Kozak, Numerična analiza, DMFA – založništvo, Ljubljana 2008.

Pričakovano predznanje: Priporočljivo je predhodno opravljanje izbirnega predmeta *Numerična aproksimacija in interpolacija*. Predavatelj bo za tiste, ki tega predmeta niso poslušali, v predavanja vključil kratko premostitev. Prav tako je zelo zaželeno solidno znanje programskega jezika Matlab.

Ocenjevanje: Domače naloge s preverjanjem v obliki kvizov na računalniku. Pisni izpit. Ustni izpit.

Semester: poletni

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski

Actuarial Mathematics – Nonlife Insurance
Aktuarska matematika – neživljenjska zavarovanja

Hansjoerg Albrecher and Peter Hieber, Université de Lausanne, Switzerland

Opis/Outline:
Individual and collective risk model
Loss distributions
Modeling of claim frequencies
Methods to compute aggregate insurance losses
Premium principles
Reinsurance
Claims reserving
(Stochastic) Chain Ladder method
Ratemaking
Generalized linear models
Mutual insurance and risk management
Credibility theory

Cilji/Objectives:
The course introduces the basic concepts of non-life insurance. This includes understanding risk theory and risk management, stochastic modeling of the underlying risks, risk pooling and diversification and claims reserving.
Further, ratemaking for insurance contracts is covered, introducing premium discrimination, the impact of inflation and model calibration. The course is very practical, illustrating theoretical results by examples and practical insights.

Pridobljene kompetence/Intended learning outcomes:
Understanding risks involved in non-life insurance, diversification and risk quantification
Knowledge of basic stochastic models for insurance
Application of theory to real insurance examples
Understanding the main factors for pricing and ratemaking in life insurance

Transferable skills: Applying mathematical and statistical concepts in insurance.

Literatura/Literature:

- S. A. Klugman, H. H. Panjer, G. E. Willmot: Loss Models : From Data to Decisions, Wiley, 1998.
- R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M Denuit: Modern Actuarial Risk Theory, Boston, Kluwer, 2001.
- H. Albrecher, J. Beirlant, H. Teugels: Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects, Wiley, 2017

Pričakovano predznanje/Prerequisites: Introductory courses in probability and in statistics.

Ocenjevanje/Assessment:

Semester: Spring

Tedenske ure/Weekly hours: 2/1/2

Jezik/Language: English

Bayesova statistika

Jaka Smrekar

Opis: Velik del statistike v praksi predstavlja ocenjevanje parametrov na podlagi slučajnega vzorca spremenljivk, katerih porazdelitve so povezane z ocenjevanimi parametri. Bayesova statistika omogoča, da v ocenjevanje vključimo predhodno 'mnenje' o vrednostih teh parametrov (na primer na podlagi sorodnih vzorcev podatkov iz preteklosti). Tudi v 'frekventističnih' problemih, ko predhodnih informacij o vrednostih naših parametrov nimamo ali pa jih ne želimo vključiti, se moramo pri ocenjevanju pogosto opreti na metode Bayesove statistike. Tipično je Bayesovo ocenjevanje računsko intenzivno in z vedno večjo zmogljivostjo računalnikov narašča tudi uporabnost Bayesove statistike.

Podrobno bomo obravnavali naslednje teme:

- Bayesovi modeli z enim in več parametri.
- Hierarhični modeli.
- Konjugirane apriorne porazdelitve.
- Algoritmi za simulacijo vzorčenja iz aposteriorne porazdelitve.
- Bayesovi regresijsi modeli.

Literatura:

- Andrew Gelman et al.: Bayesian data analysis. Taylor and Francis Group, 2014.
- Peter D. Hoff: A first course in Bayesian statistical methods. Springer, 2009.

Pričakovano predznanje: Osnove verjetnostnega računa, diskretne in zvezne slučajne spremenljivke in vektorji, večrazsežna normalna porazdelitev in iz nje izvedene porazdelitve.

Ocenjevanje: Ocena na podlagi domačih nalog, seminarske naloge in ustnega izpita.

Semester: poletni

Tedenske ure: 2/1/2

Jezik: slovenski in angleški

Časovne vrste
Time series

Bojan Basrak, University of Zagreb, Croatia

Opis/Outline: Introduction: Examples of time series. Trend and seasonality. Autocorrelation function. Multivariate normal distribution. Strong and week stationarity. Hilbert spaces and prediction. Introduction to time series modelling with R.
Stationary sequences: Linear processes. ARMA models. Causality and invertibility of ARMA processes. Infinite order MA processes. Partial autocorrelation function. Estimation of autocorrelation function and other parameters. Forecasting stationary time series. Modeling and forecasting for ARMA processes. Asymptotic behaviour of the sample mean and the autocorrelation function. Parameter estimation for ARMA processes.
Spectral analysis: Spectral density. Spectral density of ARMA processes. Herglotz theorem. Periodogram.
Nonlinear and nonstationary time series models: ARCH and GARCH models. Moments and stationary distribution of GARCH process. Exponential GARCH. ARIMA models.
Statistics for stationary process: Asymptotic results for stationary time series. Estimating trend and seasonality. Nonparametric methods.

Literatura/Literature:

- P.J. Brockwell, R.A. Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer, 2002.
- P.J. Brockwell, R.A.Davis. *Time Series: Theory and Methods*, Springer, 1991.
- W.N. Shumway, D. Stoffer, *Time Series Analysis and Its Applications*, Springer, 2006.

Pričakovano predznanje/Prerequisites: Introductory courses in probability and in statistics.

Ocenjevanje/Assessment: Written exam, seminar work and its presentation.

Semester: Spring

Tedenske ure/Weekly hours: 2/1/2

Jezik/Language: English

Finančna matematika 2

Mihael Perman

Opis: Večji del predmeta je namenjen izgradnji matematičnih orodij, potrebnih za obravnavo vrednotenja izvedenih vrednostnih papirjev v zveznem času. V zaključnem delu pridejo na vrsto temeljne ideje vrednotenja s konkretnimi primeri izračunov. Bolj podrobna vsebina je navedena spodaj.

1. Sredstva iz analize in verjetnosti.
1.1 Funkcije z omejeno totalno variacijo.
1.2 Lebesgue-Stiltjesov integral.
1.3 Konvergenca v L^2 prostorih.
1.1 Maksimalne neenakosti za diskretne martingale.
2. Brownovo gibanje.
2.1 Motivacija in definicija.
2.2 Markovska in krepka markovska lastnost, princip zrcaljenja.
2.2 Brownovi martingali.
2.3 Martingali v zveznem času, kvadratična variacija.
2.4 Izrek o opcijskem ustavljanju v zveznem času.
3. Itôv integral.
3.1 Konstrukcija, Itôva izometrija, osnovne lastnosti.
3.2 Itôva lema in uporabe.
3.2 Lokalizacija in lokalni martingali.
3.2 Integral glede na lokalni martingal
3.2 Splošna Itôva formula.
4. Vrednotenje izvedenih vrednostnih papirjev.
4.1 Samofinancirajoče strategije in varovanje.
4.2 Black-Sholesov model.
4.3 Zamenjava mere, izrek Girsanova.
4.3 Primeri izračuna za izbrane opcije.

Literatura:

- D. Lamberton, B. Lepeyre, Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman & Hall, 2000.
- S. E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models, Springer, 2004.
- T. Björk, Arbitrage Theory in Continuous Time, 3rd Edition, Oxford, 2009.

Pričakovano predznanje: Analiza 2: parcialno odvajanje, integracija funkcij več spremenljivk in integrali s parametrom. Verjetnost: neodvisnost, pričakovana vrednost, osnovne porazdelitve, pogojne porazdelitve in pogojna pričakovana vrednost, diskretni martingali. Teorija mere: abstraktni integral, izreka o monotoni in dominirani konvergenci, Fubinijev izrek, Radon-Nikodýmov izrek, L^p prostori. Finančna matematika 1: modeli gibanja cen, definicija izvedenih vrednostnih papirjev, princip ene cene, ekvivalentne mere in kompletnost modelov.

Ocenjevanje: 50 % pisni izpit, 50 % seminarska naloga.

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski

Izbrana poglavja iz finančne matematike 1: Upravljanje s tveganji
Topics in financial mathematics 1: Risk management

Michel Dacorogna, Prime Re Solutions, Zug, Switzerland

Opis/Outline: In this course, we develop the main theoretical concepts and modelling techniques of Quantitative Risk Management (QRM). The goal for the students is to acquire practical tools to solve real life problems. We discuss risk management in the context of finance and insurance, but RM applies also to other sectors of the industry. Main concepts include loss distributions, risk measures, interdependence, and concentration of (extreme) risks, techniques derived from probabilistic modelling and statistical analysis, copula and extreme value theory. We also discuss corporate finance concepts like economic valuation of liabilities, capital, capital allocation and structure of capital.

Through examples and case studies from the practice, we explain how sophisticated mathematical methods can be integrated in the efficient management of an insurance portfolio of risk. At the end, students should be able to understand how a modern financial institution manages its risks.

A. The concept of risk, risk measures, and the pricing of risk (4 hours): Definition of risk in insurance. Risk and risk measures, a coherent measure of risk. A simple example of pricing risk, what is the correct price? The various components of an insurance price. Capital to cover the risk.
B. Aggregation of risk and dependencies (4 hours): Effects of diversification on the price. The right measure of dependency. A hierarchical dependency structure to avoid over specification. Pricing within a portfolio. Dependence structure and diversification benefits.
C. Concept of capital and management of capital (4 hours): The different perspectives on capital. Risk based capital and economic capital. Capital allocation, what is the right method for what purpose. How much capital does an insurance company need? Structure of capital.
D. Designing and implementing an internal model (4 hours): History of the development of internal model. Purposes and goals of an internal model. Structure and architecture of an internal model. Model calibration and testing. Conditions for embedding the model in the business process.
E. Modelling of economic scenarios, their Impact on capital management (4 hours): The influence of the economy on an insurance company. Various ways to build economic scenario generators (ESG). The bootstrapping method to create scenarios. Yield curve modeling and stress scenarios. Testing of ESG.
F. The new Solvency Regulations and the Role of Reinsurance (4 hours): New context for the industry and new solvency regulation. Use of internal models and DFA. How to optimize a reinsurance cover. Case study: multi-lines and covers for catastrophic events.
G. Adding time diversification to risk diversification (2 hours): Bank and insurance as risk bearer and the challenges ahead. The example of natural catastrophes reserving. Measures to mitigate risk and time diversification. An investors' perspective on catastrophe risks.
H. Entreprise Risk Management (ERM), towards a holistic approach to risk management (4 hours): The context of risk management: a changing risk landscape. Risk management culture. Risk and economic capital modeling. Emerging risk management. Risk controls and processes. Strategic risk management.

Literatura/Literature: There is no book or article that covers the full set of chapters. The students will get a full set of slides for each chapter of the course.

Pričakovano predznanje/Prerequisites: Introductory courses in probability and in statistics. Students are expected to be fluent in statistical programming languages either R or Python.

Ocenjevanje/Assessment:

Semester: Spring

Tedenske ure/Weekly hours: 2/1/2. The lectures will be held in two week-long stays. Most of the course will be lectures, there will be some exercises and case studies discussions. A research project will be used to conclude the course. The seminar part of the course will be given by Paul Larsen.

Jezik/Language: English

Numerične metode v finančni matematiki
Numerical Methods in Financial Mathematics

Antonino Zanette
University of Udine, Italy and INRIA MathRisk project, Paris, France

Opis/Outline: Algorithms for option pricing in discrete models. Monte Carlo Methods for European options. Simulation methods of classical law. Inverse transform method. Computation of expectation. Variance reduction techniques. Tree methods for European and American options. Convergence orders of binomial methods. Estimating sensitivities. Numerical algorithms for portfolio insurance. Tree methods and Monte Carlo methods for Exotic options (barrier options, asian options, lookback options, rainbow options). American Monte Carlo methods. Finite difference methods for the Black-Scholes PDE equation.

Literatura/Literature:

- Notes, books and papers suggested by the teacher.
- J. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall, 2011.
- N. H. Bingham, R. Kiesel, *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, Springer Finance, 2004.
- P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2003.

Pričakovano predznanje/Prerequisites: It will be expected that the students are familiar with foundations of financial mathematics and numerical mathematics. It is required that they followed the course Financial Mathematics 2 (Finančna matematika 2) in the first semester or in the past.

Ocenjevanje/Assessment: The final examination will be composed of three parts :

- a written examination,
- an oral discussion of the topics of the course,
- a presentation of a numerical project assigned by the teacher.

Semester: Spring

Tedenske ure/Weekly hours: 2/1/2. The course will be held in a few two-day stays (3 hours of lectures per day). Other hours will be devoted to follow-up of the project development and oral discussion.

Jezik/Language: English

Verjetnost 2

Jaka Smrekar

Opis: Markovske verige v diskretnem času: Povezava s teorijo grafov in linearno algebro. Osnovna struktura verig. Časi prvih prehodov in vrnitev. Povrnljiva in minljiva stanja. Časi ustavljanja ter enostavna in krepka markovska lastnost. Ergodično obnašanje verige. Limitni izreki. Posebnosti v primeru končnega števila stanj.

Markovske verige v zveznem času: Čisti skočni procesi brez eksplozije. Zvezna markovska lastnost. Naprejšnje in nazajšnje enačbe Kolmogorova v integralski in diferencialni obliki in njihove reštve. Diferencialne enačbe in generator polgrupe. Konstrukcija: stabilnost in neeksplozivnost.

Uporaba markovskih verig: čakalne vrste, rojstno-smrtni verige, čakalni sistem M/M/1, strežni sistemi, metode Monte Carlo markovskih verig (Bayesova statistika in Monte Carlo simulacije), Metropolis-Hastingsov algoritem, konvergenca.

Literatura:

- J. R. Norris: Markov Chains. Cambridge University Press, 1997.
- S. Meyn, R. L. Tweedie: Markov chains and stochastic stability. Cambridge University Press, 2009.
- S. I. Resnick: Adventures in Stochastic Processes, Birkhäuser, 2002.
- R. Durrett: Essentials of Stochastic Processes, Springer, 2016.
- P. Brémaud: Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues. Springer, 2020.

Pričakovano predznanje: Osnovno znanje verjetnosti in statistike pridobljeno pri študiju na 1. stopnji.

Ocenjevanje: Pisni in ustni izpit.

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski

Logika v računalništvu

Alex Simpson

Opis: Uporaba logike je vse povsod v računalništvu. Predmet bo raziskoval različne vrste logike, ki se uporabljajo v računalništvu. Pogledali si bomo teorijo, aplikacije in tehnologijo, ki podpira uporabo logike v računalništvu.

Literatura:

- M. Huth and M. Ryan. Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems. Cambridge University Press. Second edition, 2004.
- K. Baier and J.-P. Katoen. Principles of Model Checking. MIT Press, 2008.
- J. Avigad, L. de Moura, S. Kong and S. Ullrich. Theorem Proving in Lean. `leanprover.github.io`.

Pričakovano predznanje:

- Osnovno znanje programiranja

Ocenjevanje: Domače naloge in ustni izpit.

Semester: poletni

Tedenske ure: 3/2

Jezik: angleški

Izbrana poglavja iz računalniške matematike: Teorija kategorij

Andrew Swan

Opis: V matematiki pogosto vidimo primere razredov matematičnih struktur skupaj z nekim pojmom preslikave ali *morfizma* med njimi. Na primer, v algebri vidimo kolobare in homomorfizme, v topologiji vidimo topološke prostore in zvezne funkcije, v linearni algebri pa vektorske prostore in linearne preslikave. Vse to so primeri *kategorij*. Obstaja veliko pojmov, ki jih je mogoče formulirati in preučevati za kategorije na splošno, nato pa jih uporabiti na primerih v matematiki in računalništvu.

Ta tečaj bo obravnaval pomembne koncepte v teoriji kategorij, vključno s kategorijami, funktorji, naravnimi transformacijami, limitami, kolimitami, adjunkcijami in monadami. Za vsako temo bomo videli tako splošne definicije kot teoreme v teoriji kategorij in njihove primere v matematiki in računalništvu.

Literatura:

- Awodey, *Category theory*, Oxford logic guides, 2010
- Leinster, *Basic category theory*, Cambridge university press, 2014
- Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate texts in mathematics, Springer, 1978

Pričakovano predznanje: nič

Ocenjevanje: domači nalogi in ustni izpit

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: angleški

Verjetnostne metode v računalništvu

Sergio Cabello

Opis: Pri predmetu bomo spoznali različne uporabe verjetnosti za reševanje algoritmičnih in sorodnih problemov. Predstavili bomo osnovne naključnostne algoritme in matematično analizirali njihove lastnosti. Poudarek bo na analizi pričakovane časovne zahtevnosti in verjetnosti napake takih algoritmov.

Podrobno bomo obravnavali naslednje teme:

- Quicksort in najmanjši prerez.
- Razredi problemov in vrste naključnostnih algoritmov.
- Uporaba polinomov v naključnostnih algoritmih.
- Černove meje (Chernoff bounds) in njihova uporaba.
- Modeliranje z naključnimi grafi.
- Naključnostni prirastni algoritmi in povratna analiza.
- Linearno programiranje v nižjih dimenzijah.
- Metoda Monte Carlo in približno štetje.
- Markovske verige in njihova uporaba (Metropolisov algoritem)
- Zgoščcevalne funkcije (hash functions).

Pričakovano predznanje: Osnovno znanje o algoritmih in (diskretni) verjetnosti. Deli predmeta so povezani s predmetom Računska geometrija in s predmetom Računska zahtevnost, vendar predznanje ni potrebno.

Ocenjevanje: pisni in ustni izpit.

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski ali angleški (odvisno od študentov pri predmetu)

Kardinalna aritmetika (Teorija množic)

Alex Simpson

Opis: Predmet predstavi teorijo množic kot samostojen matematični predmet, kot predmet, ki je povezen z drugimi matematičnimi področji, ter kot temelj matematike.

Vsebina predmeta:

- Aksiomi teorije množic.
- Teorija množic kot temelj matematike.
- Moč množic in Cantorjeva hipoteza.
- Ordinalna števila in dobre urejenosti.
- Aksiom izbire.
- Kardinalna aritmetika.
- Nedosegljivi kardinali in Grothendieckovi svetovi.
- Množice realnih števil.
- Merljivi kardinali.
- Neodvisnost in neprotislovnost.

Literatura:

- K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to Set Theory, Third Edition, Revised and Expanded.* Chapman & Hall, 1999.

Pričakovano predznanje: Splošna matematična izobraza s 1. stopnje študija matematike.

Ocenjevanje: Domača naloga, pisni izpit in ustni izpit.

Semester: poletni

Tedenske ure: 3/2

Jezik: angleški

Matematika z računalnikom

Andrej Bauer

Opis: Pri predmetu bomo spoznali, kako uporabljati računalnike v matematiki. To je široko področje, ki zajema računsko reševanje matematičnih problemov, eksperimentalno matematiko, simulacije in numerične izračune, vizualizacijo matematičnih objektov, uporabo računalnikov v izobraževanju in popularizaciji matematike in še kaj. Vsak študent bo s projektnim delom podrobneje spoznal temo, ki ga najbolj zanima, in jo tudi predstavil.

Primeri projektnih nalog:

- simulacije in intenzivno numerično računanje,
- reševanje optimizacijskih in kombinatornih problemov,
- matematične igre,
- odkrivanje zakonitosti v zbirkah matematičnih struktur,
- vizualizacija matematičnih objektov in računalniška umetnost,
- projektne naloge v sodelovanju z gospodarstvom,
- projektne naloge v sklopu raziskovalnega dela.

V prvem delu predmeta bomo spoznali nekatera osnovna orodja, ki jih bodo uporabljali študenti pri projektih. Osrednji del predmeta bo potekal projektno, v zadnjem delu pa bodo študenti predstavili svoje projekte.

Literatura: Navodila za uporabo in dokumentacija za programsko opremo, odvisno od projekta.

Pričakovano predznanje:

- osnovno znanje programiranja in kompetentna uporaba računalnikov,
- pripravljenost naučiti se uporabljati novo programsko opremo v potu svojega obraza.

Ocenjevanje: Študent pri predmetu zasnuje, izdela in predstavi projekt.

Semester: zimski

Tedenske ure: Delo bo večinoma potekalo projektno, predavatelj in asistent pa bosta sledila delu študentov ter ju usmerjala na govorilnih urah. Če bo kako programsko opremo uporabljalo več študentov, bomo zanje organizirali posebno predavanje. Ob zaključku semestra bodo študenti predstavili svoje projekte.

Jezik: slovenska predavanja; tuji študenti so dobrodošli, saj lahko projektno delo in predstavitve potekajo v angleščini.

Računska zahtevnost

Sergio Cabello

Opis:

- Modeli računanja in Turingov stroj
- Težki problemi (nedeterminizem, razreda P in NP, NP-polnost)
- Prostorska zahtevnost
- Aproksimacijski algoritmi, aproksimacijski shemi, težavnost aproksimacije
- Komunikacijska zahtevnost ali parametrična zahtevnost.

Pričakovano predznanje: Osnovno znanje logike, algoritmov, algebre, diskretne matematike in verjetnosti.

Ocenjevanje: pisni in ustni izpit.

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: angleški

Teorija programskih jezikov

Matija Pretnar

Opis: Razen zelo specifičnih programskih jezikov je praktično vsak sodobni jezik Turingovo poln, kar pomeni, da lahko v njem izrazimo vse izračunljive funkcije. Seveda pa to ne pomeni, da so zaradi tega vsi programski jeziki enakovredni. V enih se da programe pisati na precej krajši in elegantnejši način, drugi zagotavljajo dodatno varnost pri izvajanju, tretji proizvedejo učinkovitejšo strojno kodo, ...Večini jezikov, ki dobro obnesejo na vseh naštetih področjih, so skupni dobro zastavljeni matematični temelji. Navsezadnje je matematika najuniverzalnejši in najelegantnejši jezik.

Pri predmetu bomo spoznali temeljna načela, ki vodijo razvoj modernih programskih jezikov. Na primerih znanih konstruktov (pogojni stavki, funkcije, zanke, ...) bomo pogledali, kako matematično formaliziramo programski jezik, ter s pomočjo dokazovalnikov (npr. Lean, Agda) pokazali njegove lastnosti.

(1) Osnove funkcijskega programiranja.
(2) Konkretna in abstraktna sintaksa.
(3) Operacijska semantika.
(4) Sistemi tipov.
(5) Uporaba dokazovalnikov.
(6) Parametrični polimorfizem in samodejna izpeljava tipov.
(7) Denotacijska semantika.
(8) Računski učinki.

Literatura:

- B. Pierce. Types and Programming Languages. Cambridge University Press, 2002.
- J. C. Reynolds. Theories of programming languages. Cambridge University Press, 1998.
- B. Pierce et al. Software Foundations. https://softwarefoundations.cis.upenn.edu/

Pričakovano predznanje:

- Veselje do programiranja.
- Izkušnje s funkcijskim programiranjem in tipi so priporočene, vendar ne obvezne.

Ocenjevanje: Študent oceno pridobi s praktičnimi domačimi nalogami ter teoretičnim pisnim izpitom.

Semester: poletni

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski

Bridž
Obštudijska dejavnost, 3 ECTS

Barbara Drinovec Drnovšek

Opis: Bridž je družabna igra za 4 igralce oziroma 2 para, ki se igra z 52 igralnimi kartami. Sestavljena je iz dveh delov: iz licitacije in odigravanja. Pri licitaciji skušamo čim bolj natančno napovedati, koliko vzetkov bova s partnerjem dobila in katera barva bo adut. Vidimo le svoje karte, s partnerjem se sporazumevamo preko napovedi. V drugem delu igre poskuša par, ki je zmagal v licitaciji, osvojiti vsaj toliko vzetkov, kot jih je napovedal. Nasprotni par se trudi, da bi to preprečil.

Pri igri se razvija logično mišljenje, sposobnost hitrega odločanja in prilagajanje odločitev na podlagi vedno novih informacij, pa tudi socialne spretnosti in partnerski odnos.

Pri predmetu bomo spoznali osnovna pravila minibridža in bridža. Naučili se bomo osnov licitacije. Informacije, ki jih pridobimo iz licitacije, bomo uporabili pri odigravanju. Spoznali bomo temeljne prvine odigravanja: impas, ekspas, blokiranje in deblokiranje, ohranitev komunikacije, onemogočanje komunikacije med nasprotniki. Posvetili se bomo atakiranju in uporabi dovoljenih načinov komunikacije med partnerjema pri igri v obrambi.

Odigrali bomo en turnir v minibridžu in dva v bridžu.

Pričakovano predznanje: Vpis na prvo oziroma drugo stopnjo študijskega programa Univerze v Ljubljani. Predznanje ni potrebno.

Ocenjevanje: Ocenjuje se z ocenama »opravil«/»ni opravil«. Za pristop k izpitu je pogoj 75-odstotna prisotnost pri predmetu. Z dvema uspešno odigranima turnirjema študent opravi izpit.

Semester: zimski, ob sredah ob 16.15.

Tedenske ure: 1/2
Eni uri predavanj bosta sledili dve uri vaj. Študenti se bodo pridobljeno teoretično znanje naučili uporabiti v praksi.

Jezik: slovenski

Ostalo: Študent lahko obštudijsko dejavnost izbere v okviru splošnih izbirnih predmetov. Vpis v obštudijsko dejavnost bo potekal od začetka vpisov na FMF do zapolnitve prostih mest.

Prostovoljna učna pomoč
Obštudijska dejavnost, 3 ECTS

Damjan Kobal

Opis: Mladi iz socialno ogroženih družin so pogosto manj uspešni pri študijskem delu in potrebujejo učno pomoč, ki pa si je ne morejo privoščiti. Po drugi strani lahko za take otroke prav učni uspeh predstavlja motivacijo in edino upanje za izhod iz negativnih socialno-družinskih ciklov.

V sodelovanju z relevantnimi humanitarnimi organizacijami, kot so na primer *Zveza prijateljev mladine Ljubljana Moste-Polje*, *Mladinski dom Malči Beličeve* ali *Slovenska filantropija*, študent izvede približno 30 ur individualnih ali skupinskih inštrukcij ali drugega spremljevalnega dela mladih v okviru organiziranih aktivnosti ustreznih humanitarnih organizacij. O vsebini in obsegu dela študent študent vodi preprost dnevnik in ob zaključku odda enostavno poročilo.

Pričakovano predznanje: Študentje vpisani na prvo oziroma drugo stopnjo študijskih programov Univerze v Ljubljani imajo za pričakovano delo dovolj predznanja.

Ocenjevanje: Ocena »opravil«/»ni opravil« se podeli na podlagi ustrezne angažiranosti.

Semester: zimski ali poletni

Tedenske ure: po dogovoru

Jezik: slovenski

Ostalo: Študent lahko obštudijsko dejavnost izbere v okviru splošnih izbirnih predmetov. Vpis v obštudijsko dejavnost bo potekal od začetka vpisov na FMF do zapolnitve prostih mest.

Multiplikativna teorija idealov in teorija faktorizacij

Daniel Smertnig

Opis: V tem predmetu preučujemo faktorizacije elementov v atome (tj. nerazcepne elemente) v kolobarjih in monoidi. Večinoma se bomo ukvarjali z okvirom komutativnih celih kolobarijev in odpravljivih komutativnih monoidov. Že razmeroma šibki pogoji (npr. verižni pogoj naraščanja za glavne ideale) zadostujejo za zagotovitev obstoja faktorizacij elementov v nerazcepne. Zlasti imajo noetherjeva področja vedno takšne faktorizacije. Po drugi strani pa enoličnost teh faktorizacij pogosto odpove – že v tako »lepih« kolobarjih, kot sta $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ali kolobar celoštevilskih vrednostnih polinomov Int($\mathbb{Z}$). Teorija faktorizacije preučuje to neenoličnost faktorizacij z algebraičnimi, analitičnimi in kombinatoričnimi metodami.

Teme predmeta vključujejo:

- osnovne invariante teorije faktorizacije (množice dolžin, elastičnosti, catenarne stopnje),
- Dedekindovi kolobarji,
- Krullovi celi kolobarji in Krullovi monoidi,
- razredna grupa deliteljev Krullovega monoida,
- monoidi zaporedij ničelnih vsot,
- transferni homomorfizmi v teoriji faktorizacije za Krullove monoide,
- multiplikativna teorija idealov komutativnih kolobarijev in monoidov.

Literatura:

- A. Geroldinger, F. Halter-Koch. Non-Unique Factorizations Algebraic, Combinatorial and Analytic Theory. CRC Press, 2006.
- F. Halter Koch (editors: A. Geroldinger and A. Reinhart). Ideal Theory of Commutative Rings and Monoids, Springer, 2025.
- F. Wang, H. Kim. Foundations of Commutative Rings and Their Modules. Springer, 2024.

Pričakovano predznanje: Algebra 2 in 3. Komutativna algebra in teorija števil sta koristni, ampak ne nujno potrebni.

Ocenjevanje: pisno

Semester: poletni

Tedenske ure: 2/0

Jezik: angleški

Hanklovi in Toeplitzovi operatorji

Roman Bessonov

Opis: Predmet je uvod v teorijo prostorov Hardy ter Hanklovih in Toeplitzovih operatorjev na njih. Te operatorje lahko obravnavamo kot strukturirane matrike, pojavljajo se v širokem spektru tem, od teorije napovedovanja do problemov optimalnega nadzora, od operatornih algebr do teorije sipanja. Predmet se bo osredotočil na njihove osnovne lastnosti in prikazal več pomembnih aplikacij. Večina dokazov je funkcijsko-teoretična narave, na meji kompleksne analize in teorije operatorjev.

Literatura:

- N.K.Nikolskii, *Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 1*, Mathematical Surveys and Monographs, 92, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002
- A.Böttcher and B.Silbermann, *Introduction to large truncated Toeplitz matrices*, Universitext, Springer, New York, 1999
- V.V.Peller, *Hankel operators and their applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2003
- N.K.Nikolskii, *Toeplitz matrices and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2020

Pričakovano predznanje: Osnove teorije mere in kompleksne analize.

Ocenjevanje:

- Domače naloge
- Ustni izpit

Semester: Zimski semester.

Tedenske ure: 2 uri predavanj tedensko.

Jezik: Angleški.

Vztrajna homologija

Žiga Virk

Opis: Vztrajna homologija je parametrizirana verzija homologije, s katero merimo velikosti lukenj v prostoru. V zadnjem času je gonilo topološke analize podatkov, v okviru katere jo pogosto označujejo kot stabilen deskriptor geometrijskih oblik. V okviru predmeta bomo predstavili topološke, algebrajske in kombinatorične konstrukcije, preko katerih je vztrajna homologija definirana. Razložili bomo osnovne načine njenih izračunov, se poglobili v njeno stabilnost (zveznost) in si ogledali njene uporabe v matematiki ter še kje.

Literatura:

- Žiga Virk. *Introduction to Persistent Homology*, Založba UL FRI, University of Ljubljana, 2022.
- Herbert Edelsbrunner, John L. Harer. *Computational Topology, An Introduction*, American Mathematical Society, 2010.
- Ulrich Bauer in Michael Lesnick, *Induced Matchings and the Algebraic Stability of Persistence Barcodes*, Journal of Computational Geometry 6:2 (2015), 162–191.

Pričakovano predznanje:
Zahtevano: Osnove linearne algebre (Gaussova eliminacija, vektorski prostori)
Zaželjeno: osnove algebrajske topologije

Ocenjevanje: Potrebno bo opraviti domačo nalogo, poleg tega pa še ustni izpit ali predstavitev članka.

Semester: Poletni

Tedenske ure: 2 uri predavanj na teden

Jezik: angleški