

## **Zaključni izpit na 2. stopnji študija matematike**

Študent dobi na zaključnem izpitu tri vprašanja: eno iz osnov matematične analize, eno iz osnov algebre ter eno iz izbranega področja magistrskega študija. Za tretje vprašanje študent izbere eno izmed osnovnih področij (analiza, algebra, geometrija in topologija, verjetnost in statistika, numerična matematika, diskretna matematika in računalniška matematika) študija na 2. stopnji. Vprašanja so zajeta iz vnaprej pripravljenega seznama naslovov.

- 1. Vprašanje iz Analize:** Naslovi obsegajo pomembnejšo snov obveznih predmetov s 1. stopnje študija.
- 2. Vprašanje iz Algebre:** Naslovi obsegajo pomembnejšo snov obveznih predmetov s 1. stopnje študija.
- 3. Tretje vprašanje** je s področja, ki ga študent izbere v soglasju z mentorjem izmed področij analize, algebre, geometrije in topologije, verjetnosti in statistike, numerične matematike, diskretne matematike ali računalniške matematike. Naslovi posameznega področja obsegajo osnovna znanja s prve in druge stopnje.

## **Zaključni izpit na 2. stopnji študija matematike**

### **(prvo vprašanje)**

#### **ANALIZA**

Obseg realnih števil, polnost. Številska zaporedja. Številске vrste. Odvod in diferencialne funkcije. Rollejev in Lagrangeev izrek. Uporaba odvodov pri analizi funkcij. Nedoločeni integral. Določeni (Riemannov) integral. Osnovni izrek integralnega računa. Posplošeni integrali. Obstoj integrala. Uporaba Taylorjeve formule. Funkcijska zaporedja in vrste. Enakomerna konvergenca. Odvajanje in integriranje funkcijskih vrst.

Metrični prostori. Zaporedja v metričnih prostorih, stekališče, limita. Cauchyjev pogoj za konvergenco, polnost. Kompaktnost. Povezanost. Zvezne preslikave metričnih prostorov. Banachov izrek o skrčitvah.

Funkcije več spremenljivk. Parcialni odvodi in diferenciability. Taylorjeva formula. Jacobijeva matrika in determinanta. Izrek o implicitni in inverzni preslikavi. Ekstremi in vezani ekstremi. Integrali s parametrom. Riemannov integral funkcije več spremenljivk. Volumen množic v  $\mathbf{R}^n$ . Obstoj večternega Riemannovega integrala. Fubinijev izrek. Krivulje in ploskve v prostoru. Ukrivljenost krivulj, Frenetove formule. Prva in druga fundamentalna forma ploskve v prostoru. Skalarna in vektorska polja. Gradient, rotor, divergenca in Laplaceov operator. Krivuljni in ploskovni integrali. Gaussov izrek, Stokesov izrek in Greenova formula.

Obseg kompleksnih števil. Kompleksni odvod. Holomorfne funkcije. Cauchy-Riemannove enačbe. Potenčne vrste. Cauchyjeva formula. Liouvilleov izrek. Osnovni izrek algebre. Lokalna oblika holomorfne funkcije. Izrek o odprti preslikavi. Princip maksima. Laurentova vrsta. Izolirane singularne točke. Izrek o ostankih. Princip argumenta. Rouchéjev izrek. Konformne preslikave.

Diferencialne enačbe, eksistenčni izreki. Linearne diferencialne enačbe in sistemi linearnih diferencialnih enačb prvega reda. Variacijski račun. Euler-Lagrangeeva enačba. Izoperimetrična naloga.

Fourierove vrste, konvergenčni izreki. Hilbertov prostor, kompleten ortonormiran sistem. Fourierova in Laplaceova transformacija. Klasifikacija parcialnih diferencialnih enačb drugega reda. Toplotna enačba na palici. Valovna enačba na struni.

## **Zaključni izpit na 2. stopnji študija matematike**

### **(drugo vprašanje)**

#### **ALGEBRA**

Realni trirazsežni vektorski prostor. Skalarni, vektorski in mešani produkt. Ravnine in premice v prostoru.

Vektorski prostori. Baza in razsežnost. Vsota in presek podprostorov. Dualni prostor in dualna preslikava. Prostor linearnih preslikav in matrik. Sprememba baz, ekvivalentnost in rang. Sistemi linearnih enačb.

Algebra endomorfizmov in kvadratnih matrik. Podobnost. Determinante. Lastne vrednosti. Karakteristični in minimalni polinom. Jordanova matrika endomorfizma.

Skalarni produkt in norma. Gram-Schmidtova ortogonalizacija. Adjungirana preslikava. Normalni, sebiadjungirani in unitarni endomorfizmi. Pozitivno definitni endomorfizmi in matrike. Bilinearni in kvadratni funkcionali.

Dvomestna operacija. Polgrupe in grupe: osnovne lastnosti in primeri. Ciklične grupe. Podgrupe, odseki, Lagrangeev izrek. Edinke, kvocientna grupa in homomorfizmi grup.

Kolobarji: osnovne lastnosti in primeri. Podkolobarji in ideali. Kvocientni kolobar in homomorfizmi kolobarjev. Obsegi. Polje (obseg) ulomkov. Karakteristika. Evklidski in glavni kolobarji. Kolobarji polinomov.

Komutativni obsegi (polja): osnovne lastnosti in primeri. Končne, algebraične in transcendentne razširitve. Razpadno polje. Algebraično zaprta polja, osnovni izrek algebre. Končna polja.

## Zaključni izpit na 2. stopnji študija matematike

### (tretje vprašanje)

#### Področje: ANALIZA

(Kandidat izbere tri izmed spodnjih sklopov vprašanj, iz katerih bo dobil vprašanje.)

- 1. Teorija mere:** Sigma algebre. Borelove množice. Merljive preslikave. Pozitivna mera. Lebesgueova mera. Definicija Lebesgueovega integrala. Osnovni konvergenčni izreki. Povezava med Riemannovim in Lebesgueovim integralom. Konvergenca v  $L^1$  in skoraj povsod. Izrek Jegorova. Produktna mera in Fubini-Tonellijev izrek. Kompleksne mere. Absolutna zveznost in vzajemna singularnost. Variacija kompleksne mere. Lebesgue-Radon-Nikodymov izrek o odvajanju mer.
- 2. Funkcionalna analiza:** Hilbertovi in Banachovi prostori. Linearni operatorji in linearni funkcionali. Hahn-Banachov izrek. Reprezentacija zveznega linearnega funkcionala na Hilbertovem prostoru. Kompaktni operatorji in njihov spekter. Diagonalizacija kompaktnega sebiadjungiranega operatorja.
- 3. Kompleksna analiza:** Rešitev nehomogene  $\bar{\partial}$ -enačbe. Normalne družine in Montelov izrek. Weierstrassov faktorizacijski izrek. Rungejev izrek. Mittag-Lefflerjev izrek. Schwarzjev princip zrcaljenja. Riemannov upodobitveni izrek.
- 4. Parcialne diferencialne enačbe:** Distribucije. Fourierova transformacija v  $\mathbf{R}^n$ . Valovna enačba. Toplotna enačba. Gaussovo jedro. Laplaceova in Poissonova enačba. Greenova funkcija in Poissonovo jedro. Harmonične funkcije. Metoda separacije spremenljivk.

## Zaključni izpit na 2. stopnji študija matematike

### (tretje vprašanje)

#### Področje: ALGEBRA

(Kandidat izbere šest izmed spodnjih sklopov vprašanj, iz katerih bo dobil vprašanje.)

- 1. Grupe:** Končne Abelove grupe, izreki Sylowa, rešljive grupe, nilpotentne grupe, končne  $p$ -grupe, proste grupe.
- 2. Komutativni obsegi (polja):** Galoisova teorija razširitev, rešljivost algebraičnih enačb z radikali, osnovni izrek algebre in algebraično zaprti obsegi, Wedderburnov izrek.
- 3. Kategorije:** Kategorija in funktor, produkti, koprodukti, prosti objekt, zgledi.
- 4. Moduli:** Podmoduli, faktorski moduli, homomorfizmi, eksaktnost, prosti in projekтивni moduli, tenzorski produkti.
- 5. Komutativna algebra:** Algebre polinomov ene in več spremenljivk, Hilbertov izrek o bazi (Basissatz). Praideali, primarni in maksimalni ideali. Lokalizacija, varietete in ideali. Hilbertov izrek o ničlah (Nullstellensatz).
- 6. Nekomutativna algebra:** Končno razsežne algebre (Wedderburnova strukturna teorija, obsegi), tenzorski produkti algeber, primitivni kolobarji, Jacobsonov radikal.
- 7. Urejenostne strukture:** Linearno urejene grupe, formalno realni in urejeni obsegi, teorija valuacij. Mreže (distributivne in modulske).
- 8. Neasociativne algebre:** Liejeve algebre, zveza z (matričnimi) Liejevimi grupami, Engelov in Liejev izrek. Alternativne in jordanske algebre (osnovni pojmi in primeri).

## Zaključni izpit na 2. stopnji študija matematike

### (tretje vprašanje)

#### Področje: GEOMETRIJA IN TOPOLOGIJA

(Kandidat izbere tri izmed spodnjih sklopov vprašanj, iz katerih bo dobil vprašanje.)

- 1. Splošna in geometrijska topologija:** Topološki prostori, zvezne preslikave. Separacijske lastnosti, kompaktnost, povezanost. Produktni in kvocientni prostori. Tietzejev in Stone-Weierstrassov izrek. Brouwerjeva izreka o negibni točki in o invarianci odprtih množic, Jordanov izrek. Simplicialni kompleksi, topološke mnogoterosti, Eulerjeva karakteristika, klasifikacija kompaktnih ploskev.
- 2. Algebraična topologija:** Homotopija. CW-kompleksi. Fundamentalna grupa, Seifert-vanKampenov izrek. Krovni prostori. Višje homotopske grupe, Whiteheadov izrek. Homološke grupe, stopnja preslikave, ovojno število. Dvigi in razširitve homotopij.
- 3. Analiza na mnogoterostih:** Gladke mnogoterosti in podmnogoterosti, orientacija, transverzalnost. Tok vektorskega polja, Frobeniusov izrek. Tangentni sveženj, diferencialne forme, De Rhamova kohomologija. Integracija na mnogoterostih, Stokesov izrek.
- 4. Liejeve grupe in diferencialna geometrija:** Liejeve grupe ter njihove Liejeve algebre, eksponentna preslikava, adjungirano delovanje. Glavni in vektorski svežnji, povezave na svežnjih, ukrivljenost, torzija, holonomija. Riemannove mnogoterosti, Levi-Civitájeva povezava, Riemannov tenzor ukrivljenosti, geodetske krivulje.
- 5. Algebraična geometrija:** Afine in projektivne raznoterosti, osnovni izrek afine in projektivne geometrije. Algebraične krivulje, kubične krivulje, polare, Bézoutov izrek. Hilbertov izrek o ničlah. Regularne in racionalne preslikave. Hilbertov polinom.

## Zaključni izpit na 2. stopnji študija matematike

### (tretje vprašanje)

#### Področje: VERJETNOST IN STATISTIKA

**Verjetnost na elementaren način:** Množica izidov, dogodki, aksiomi verjetnosti, pogojna verjetnost, neodvisnost. Diskretne slučajne spremenljivke in vektorji – porazdelitvena funkcija in verjetnostna funkcija, matematično upanje, funkcije slučajnih vektorjev, pogojna porazdelitev in pogojno matematično upanje, neodvisnost. Rodovne funkcije. Zvezne slučajne spremenljivke in vektorji – gostota porazdelitve, matematično upanje, funkcije slučajnih vektorjev, pogojna porazdelitev in pogojno matematično upanje, neodvisnost. Večrazsežna normalna porazdelitev. Konvergenca slučajnih spremenljivk – vrste konvergenca, zakoni velikih števil, centralni limitni izrek.

**Markovske verige:** Diskretni čas – prehodne matrike, časi ustavljanja, povrnljiva in minljiva stanja, ergodijsko obnašanje verige in splošnejši limitni izreki. Zvezni čas – proces štetja, sistem diferencialnih enačb Kolmogorova za homogene verige, generator stohastične polgrupe, stacionarna porazdelitev in limitni izreki, obratna pot do markovskih verig, stabilnost in eksplozije.

**Statistika:** Vzorčenje – enostavno slučajno vzorčenje, vzorčna porazdelitev, standardna napaka in intervali zaupanja, stratificirano vzorčenje. Ocenjevanje parametrov – cenilke, lastnosti cenilk, metoda največjega verjetja, asimptotične lastnosti cenilk. Linearni regresijski modeli, izrek Gauss-Markova, logistična regresija. Preizkušanje domnev – moč preizkusa, analiza variance, Wilksov izrek, neparametrični preizkusi.

## **Zaključni izpit na 2. stopnji študija matematike**

### **(tretje vprašanje)**

#### **Področje: NUMERIČNA MATEMATIKA**

Izvori napak pri numeričnem računanju, občutljivost problema, konvergenca in stabilnost numerične metode. Reševanje nelinearnih enačb v eni in več razsežnostih: osnovne metode, red konvergence. Sistemi linearnih enačb. Občutljivost problema, ocene napak, razcep LU, razcep Choleskega. Predoločeni sistemi. Normalni sistem, razcep QR, Givensove rotacije, Householderjeva zrcaljenja, singularni razcep. Algebraični problem lastnih vrednosti. Schurova forma, potenčna metoda, inverzna iteracija, QR iteracija za simetrične in nesimetrične matrike, minimaks izrek, Jacobijeva metoda.

Aproksimacija. Element najboljše aproksimacije, obstoj in enoličnost. Enakomerna aproksimacija, Remezova postopka, aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov. Interpolacija. Lagrangeeva in Newtonova oblika interpolacijskega polinoma, okrnitvena napaka. Kubični zlepci. Numerično odvajanje. Numerično integriranje. Interpolacijska integracijska pravila in izražava ostanka. Newton-Cotesova in Gaussova pravila, sestavljena pravila, Rombergova ekstrapolacija. Navadne diferencialne enačbe, sistemi diferencialnih enačb, enačbe višjih redov. Začetni problemi. Enočlenske metode, linearne veččlenske metode, izpeljava, stabilnost in konvergenca. Robni problemi drugega reda. Parcialne diferencialne enačbe. Osnovne enačbe matematične fizike in reševanje z diferenčno metodo.



## **Zaključni izpit na 2. stopnji študija matematike**

### **(tretje vprašanje)**

#### **Področje: DISKRETNA MATEMATIKA**

Osnovne definicije. Homomorfizmi, izomorfizmi in avtomorfizmi grafov. Drevesa in gozdovi. Dvodelni grafi. Eulerjevi grafi. Hamiltonovi grafi. Povezanost po vozliščih in povezavah, Mengerjevi izreki. Pokritja in prirejanja v dvodelnih grafih. Barvanja grafov, Brooksov in Vizingov izrek. Ravninski grafi. Eulerjeva formula in posledice. Izrek Kuratowskega.

Osnovna načela preštevanja, Dirichletov princip. Izbori, razbitja in razčlenitve (Stirlingova števila 1. in 2. vrste, Lahova števila, število razčlenitev naravnega števila, pentagonalni izrek), dvanajstera pot. Načelo vključitev in izključitev, Möbiusova inverzija, teorija Pólya in Redfielda. Rekurzivne enačbe (linearne s konstantnimi koeficienti, uporaba rodovnih funkcij). Formalne potenčne vrste in rodovne funkcije (primeri uporabe, Catalanova števila, eksponentna formula, Lagrangeeva inverzija, Cayleyjev izrek).

## Zaključni izpit na 2. stopnji študija matematike

### (tretje vprašanje)

#### Področje: RAČUNALNIŠKA MATEMATIKA

(Kandidat izbere enega izmed spodnjih sklopov vprašanj, iz katerega bo dobil vprašanje.)

**1. Algoritmi, izračunljivost in zahtevnost:** Pojem algoritma in modeli računanja. Podatkovni tipi in abstraktne podatkovne strukture. Drevesne strukture. Zgoščene tabele. Metode za urejanje podatkov. Metode načrtovanja algoritmov. Osnovni algoritmi na grafih. Linearno programiranje. Dualnost. Osnovne naloge računske geometrije. Osnove kriptografije.

Izračunljive funkcije. Rekurzivne in rekurzivno preštevne množice. Časovna in prostorska zahtevnost. Determinizem in nedeterminizem. NP-polni problemi. Naključnostni algoritmi. Aproksimativni algoritmi. Težavnost aproksimacije.

**2. Algoritmi in optimizacija:** Pojem algoritma in modeli računanja. Podatkovni tipi in abstraktne podatkovne strukture. Drevesne strukture. Zgoščene tabele. Metode za urejanje podatkov. Metode načrtovanja algoritmov. Osnovni algoritmi na grafih. Časovna in prostorska zahtevnost. NP-polni problemi. Aproksimativni algoritmi.

Optimizacijski problemi. Lokalna optimizacija. Linearno programiranje. Dualnost. Celoštevilsko programiranje. Problem razvoza. Prirejanja in pokritja. Največji pretoki. Osnove teorije iger. Matrične igre. Konveksna optimizacija. Karush-Kuhn-Tuckerjev izrek.