

FMF | UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za matematiko in fiziko

Izbirni predmeti na magistrskih in doktorskih študijskih programih Oddelka za matematiko FMF

Študijsko leto 2026/27

Ljubljana, 2026

Kazalo

Predmeti v letu 2026/27 3
Temeljni predmeti v predmetnih skupinah 5
Opisi predmetov iz skupine M1 (analiza in mehanika) 6
Opisi predmetov iz skupine M2 (algebra in diskretna matematika) 9
Opisi predmetov iz skupine M3 (geometrija in topologija) 13
Opisi predmetov iz skupine M4 (numerična matematika) 16
Opisi predmetov iz skupine M5 (verjetnost, statistika, finančna matematika) 19
Opisi predmetov iz skupine R1 (računalniška matematika) 26
Opisi ostalih predmetov na magistrskem študiju 33
Opisi doktorskih predmetov 37

Seznam izbirnih predmetov v letu 2026/27

IPXY v imenu predmeta pomeni, da predmet sodi med izbrana poglavja. Ob tej oznaki je naveden opisni/vsebinski podnaslov predmeta.

Jezik izvajanja predmeta:
- slo – slovenski
- ang – angleški
- slo/ang – če so pri predmetu tuji študenti, praviloma angleški

Skupina	Predmet	Izvajalec	Sem.	Jezik
M1	Parcialne diferencialne enačbe	Kostenko	2.	ang
	Uvod v funkcionalno analizo	Klep	1.	slo
	Uvod v harmonično analizo	Bessonov	1.	ang
M2	IPDM: Končni avtomati	Kudryavtseva	1.	slo/ang
	Komutativna algebra	Klep	1.	slo/ang
	Teorija grafov	Iršič Chenoweth	2.	slo/ang
	Teorija števil	Smertnig	2.	ang
M3	Analiza na mnogoterostih	Mrčun	1.	slo
	Diferencialna geometrija	Saksida	2.	slo/ang
	IPTop: Topologija v robotiki	Pavešić	1.	slo/ang
M4	Iterativne numerične metode v linearni algebri	Plestenjak	2.	slo/ang
	Numerična integracija in navadne diferencialne enačbe	Grošelj	1.	slo
	Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje	Knez	1.	slo
M5	Aktuarska matematika – življenjska zavarovanja	Marino	2.	ang
	Finančna matematika 2	Perman	1.	slo
	Finančna matematika 3	Gall	2.	ang
	Optimizacija v financah	Agram	2.	ang
	Slučajni procesi 2	Vidmar	2.	slo/ang
	Statistika 2	Smrekar	1.	slo
	Verjetnost 2	Raič	1.	slo/ang
R1	IPOpt	Bašić	2.	slo
	IPRM: Računalniške metode v teoriji grup	Toledo	1.	ang
	Logika	Simpson	2.	slo/ang
	Napredno strojno učenje	Todorovski	1.	slo
	Računska geometrija	Cabello	1.	ang
	Simbolno računanje	Smertnig	2.	ang
	Teorija izračunljivosti	Simpson	1.	slo/ang
O	Delovna praksa	Žitnik, Košir	oba	slo
	Matematika v industriji	Knez	oba	slo
	Moderna fizika	Grozdanov	1.	slo/ang

Skupina	Predmet	Izvajalec	Sem.	Jezik
IŠRM A	Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje	Knez	1.	slo
	Računska geometrija	Cabello	1.	ang
IŠRM B	IPDM: Končni avtomati	Kudryavtseva	1.	slo/ang
	IPNM: Iterativne numerične metode v linearni algebri	Plestenjak	2.	slo/ang
	IPNM: Numerična integracija in navadne diferencialne enačbe	Grošelj	1.	slo
	IPOpt	Bašić	2.	slo
	IPRM: Računalniške metode v teoriji grup	Toledo	1.	ang
	Simbolno računanje	Smertnig	2.	ang
	Teorija izračunljivosti	Simpson	1.	slo/ang

Opisi teh predmetov so pri ustreznih predmetih iz skupin M1–M5 in R1.

Seznam ostalih predmetov, ki se bodo izvajali na FMF v letu 2026/27 in jih lahko izberejo študenti 2. stopnje

Skupina:
- S – splošni izbirni predmet
- OD – obštudijska dejavnost
- DOK – doktorski predmet

Skupina	Predmet	Izvajalec	Sem.	Jezik
S	Projektno delo	Knez	oba	slo
OD	Bridž	Drinovec Drnovšek	1.	slo
	Matematična tekmovanja	Iršič Chenoweth, Klep	1.	slo
	Prostovoljna učna pomoč	Potočnik	oba	slo
DOK	Kategorna logika	Simpson	1.	ang
	Struktura in naključnost v teoriji grafov in aditivni kombinatoriki	Jezernik	2.	ang
	Teorija razširitev simetročnih operatorjev in uporaba	Kostenko	1.	ang
	Uporaba kohomologije v kompleksni analizi	Pavešić, Slapar	2.	slo/ang

V nadaljevanju sledijo vsebinski opisi predmetov, ki so jih pripravili izvajalci. Pomen oznak pri tedenskih urah v opisih predmetov:
- $p/v = p$ ur predavanj in v ur vaj na teden
- $p/s/v = p$ ur predavanj, s ur seminarja in v ur vaj na teden

Seznam temeljnih predmetov na magistrskem študiju

Naslednji predmeti so ključni v svojih skupinah in se praviloma izvajajo vsaki dve leti.

Skupina	Temeljni predmeti
M1 (analiza in mehanika)	Kompleksna analiza Parcialne diferencialne enačbe Teorija mere Uvod v funkcionalno analizo
M2 (algebra in diskretna matematika)	Kombinatorika Komutativna algebra Nekomutativna algebra Teorija grafov
M3 (geometrija in topologija)	Algebraična topologija 1 Analiza na mnogoterostih
M4 (numerična matematika)	Numerična aproksimacija in interpolacija Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje
M5 (verjetnost, statistika, finančna matematika)	Finančna matematika 2 Statistika 2 Verjetnost 2
R1 (računalniška matematika)	Logika v računalništvu Matematika z računalnikom Računska geometrija Verjetnostne metode v računalništvu
O (ostalo)	Astronomija Moderna fizika

Parcialne diferencialne enačbe

Aleksey Kostenko

Opis: V predmetu nameravamo zajeti nekaj pomembnih teoretičnih poglavij kot tudi nekaj netrivialnih aplikacij diferencialnih enačb. Prvi del predmeta se začne s preučevanjem osnovnih vprašanj obstoja in edinstvenosti (npr. Cauchy–Kovalevskaya izrek, Levyjev primer). Nato nadaljujemo s študijem najpomembnejših linearnih enačb 2. reda: Laplaceove, toplotne in valovne enačbe. Drugi del bo uvod v funkcionalno analitično obravnavo parcialnih diferencialnih enačb (npr. Sobolev prostori, distribucije, linearne PDE s konstantnimi koeficienti, eliptične PDE drugega reda itd.).

Literatura:

- W. Craig, *A Course on Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., 2018.
- L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd edn., Amer. Math. Soc., 2010.
- D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd edn., Springer, 2001.
- F. John, *Partial Differential Equations*, 3rd edn., Springer, 1978.

Pričakovano predznanje: Osnove matematične analize, osnove ODE. Nekaj znanja o teoriji mer (npr. Lebegov integral, prostori L^p) je zaželeno, ni pa nujno.

Ocenjevanje: Študentje ob koncu semestra dobijo obsežnejšo domačo nalogo. Za pozitivno oceno pri predmetu potem opravijo še ustni zagovor.

Semester: poletni

Tedenske ure: 3/2

Jezik: angleški

Uvod v funkcionalno analizo

Igor Klep

Vsebina:
Funkcionalna analiza je linearna algebra v neskončnih dimenzijah. Spoznamo osnovne pojme teorije Banachovih prostorov (= vektorski prostori opremljeni z normo, glede na katero so polni), Hilbertovih prostorov (= vektorski prostori opremljeni s skalarnim produktom, ki so polni) in linearnih operatorjev med njimi. Najpreprostejši linearni operatorji so linearni funkcionali, ki slikajo iz Banachovega ali Hilbertovega prostora v skalarje. Za njih bomo dokazali Hahn-Banachov izrek in nekatere njegove posledice, npr. v konveksnosti. Kot zanimivost omenimo, da v neskončno razsežnih Banachovih ali Hilbertovih prostorih obstajajo linearne preslikave (in celo linearni funkcionali), ki niso zvezni.

Srečali bomo tudi kompaktne operatorje, ki imajo podobne lastnosti kot matrike – operatorji na končnorazsežnih prostorih. Dokazali bomo spektralni izrek za sebi-adjungirane kompaktne operatorje in singularni razcep za poljubne kompaktne operatorje.

Potrebno/pričakovano predznanje: Osnove linearne algebre in matematične analize.

Izvedba 3/2: Predavanja in vaje.

Ocenjevanje: Med semestrom bosta domači nalogi, na koncu pa še pisni izpit. Ob uspešno opravljenem pisnem izpitu je potrebno opraviti ťudi teoretični del izpita.

Končna ocena je sestavljena na sledeči način:

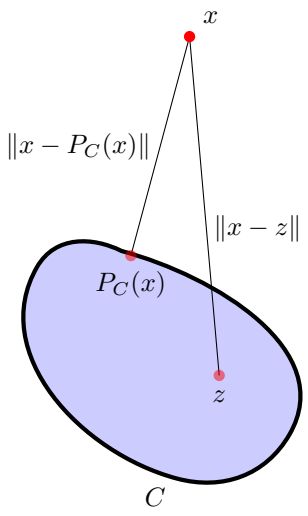
- domače naloge 8%;
- pisni del izpita 50%;
- teoretični del izpita 42%.

Literatura:

- Peter D. Lax: *Functional Analysis*, Wiley, 2002.

Semester: zimski

Jezik: slovenski



Uvod v harmonično analizo

Roman Bessonov

Opis: Glavna ideja harmonične analize je: *vse na svetu je zgrajeno iz harmonikov.* Harmonična analiza, ki izvira iz študija nihajočih strun, obravnava poljubno funkcijo f na $[-\pi, \pi]$ kot vsoto osnovnih harmonikov ("stoječih valov") $\sin kx$, $\cos kx$, s celoštevilskimi frekvencami, tj. v obliki

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx).$$

Naloga je nato povezati različne lastnosti funkcije f z lastnostmi njenih Fourierovih koeficientov a_k, b_k, in obratno. Vsaka posamezna izbira množice harmonikov in razreda funkcij f, ki jih obravnavamo, ustreza določeni veji teorije. To je zelo zanimivo, obsežno in dejavno področje matematike z uporabo v matematični fiziki in inženirstvu. Namen predmeta je zbrati najizrazitejše rezultate harmonične analize, ki kažejo njeno moč v različnih okoljih. Spoznali bomo takšne bisere teorije, kot so:

- Fourierove vrste v splošnih Hilbertovih prostorih
- Paley-Wienerjev izrek
- Kadecov izrek o 1/4
- Načelo nedoločenosti
- Rieszov izrek o analitičnih merah
- Kolmogorovov izrek o šibkem tipu $(1, 1)$ Hilbertove transformacije
- Riesz-Thorinov interpolacijski izrek
- Maksimalne funkcije in maksimalni operatorji na podvojitvenih metričnih prostorih
- Atomski Hardyjev prostor in BMO
- Naključna stacionarna zaporedja in njihovo napovedovanje

Vsaki temi bo posvečeno eno ali dve predavanji. Zelo pogosto je mogoče različne teme obravnavati neodvisno.

Literatura:

- E.M. Stein, *Harmonic Analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* Princeton University Press, 2016.
- N.K. Nikolskii, *Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 1*, Mathematical Surveys and Monographs, 92, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

Pričakovano predznanje: Funkcionalna analiza in/ali teorija operatorjev, teorija mere, osnove kompleksne analize.

Ocenjevanje: Domače naloge in ustni izpit.

Semester: Zimski semester.

Tedenske ure: 3 ure predavanj in 2 uri vaj tedensko.

Jezik: Angleški.

Predmet bo ponujen tudi doktorskim študentom.

Izbrana poglavja diskretne matematike: Končni avtomati

Ganna Kudryavtseva

Opis:
Teorija avtomatov preučuje abstraktne modele sistemov, katerih delovanje temelji na prehodih med stanji, ter razvija metode za opis, analizo in uporabo takšnih sistemov. Področje povezuje metode diskretne matematike, algebre, kombinatorike, logike in teoretičnega računalništva.

Predmet ponuja uvod v teorijo končnih avtomatov in racionalnih jezikov s poudarkom na povezavah z algebro in logiko. Obravnavali bomo tudi Mealyjeve avtomate, ki besede pretvarjajo (in jih ne le sprejemajo ali zavračajo), ter njihovo uporabo v algebri. Ob koncu si bomo ogledali nekaj sodobnejših rezultatov in smeri razvoja področja.

Osnovne teme predmeta:

- Končni avtomati, prepoznavni in racionalni jeziki; Kleenejev izrek o ekvivalenci racionalnosti in prepoznavnosti.
- Sintaksični monoid končnega avtomata. Myhill–Nerodov izrek: jezik je prepoznaven natanko tedaj, ko ima končen sintaktičen monoid.
- Eilenbergov izrek o bijekciji med raznoterostmi racionalnih jezikov in raznoterostmi končnih monoidov.
- Posebna primera Eilenbergove korespondence: Schützenbergerjev izrek o jezikih brez zvezde in Simonov izrek o po kosih testabilnih jezikih.
- Povezava med končnimi avtomati in logiko: Büchijev izrek o ekvivalenci med končnimi avtomati in monadno logiko drugega reda.
- Avtomati, ki pretvarjajo besede: Mealyjevi avtomati ter z njimi generirane polgrupe in grupe.

Literatura:

1. M. V. Lawson, *Finite automata*, CRC Press, 2003.
2. J.-E. Pin, *Mathematical foundations of automata theory*, 2025, dostopno na spletu.
3. J.-E. Pin, *Varieties of formal languages*, North Oxford Academic Publ., 1986.

Pričakovano predznanje: Zaželeno je poznavanje osnovnih pojmov iz teorije polgrup in grup (predmet Algebra 2), ki jih bomo tudi sproti na kratko povzeli.

Ocenjevanje: Domači nalogi (2), pisni kombiniran izpit iz vaj in teorije. Po uspešno opravljenem pisnem izpitu sledi še ustni zagovor.

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2 predavanja in vaje.

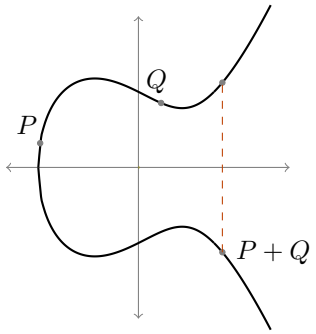
Jezik: slovenski ali angleški (odvisno od študentov pri predmetu).

Komutativna algebra

Igor Klep

Vsebina:
Komutativna algebra preučuje komutativne kolobarje, njihove ideale in module. Algebraična geometrija in moderna teorija števil sta zasnovani na komutativni algebri. Osnovni primeri komutativnih kolobarjev so polinomski kolobarji, kolobarji algebraičnih celih števil (npr. $\mathbb{Z}$ ali $\mathbb{Z}[i]$) in p-adična cela števila. Pri predmetu bomo nadgradili osnovno znanje teorije kolobarjev z naslednjimi temami:

- Komutativni kolobarji, ideali, moduli.
- Noetherski kolobarji in Hilbertov izrek o bazi.
- Groebnerjeve baze, osnove računanja z ideali.
- Spekter kolobarja in radikali. Lokalizacija in napolnitev.
- Afine varietete in topologija Zariskega. Hilbertov Nullstellensatz.
- Morfizmi, polinomske in racionalne preslikave. Izomorfizmi in biracionalnost.
- Projektivne varietete.
- Dimenzija in gladkost.
- Sheme.



$y^2 = x^3 - x + 1$

Literatura:

- D. Cox, J. Little, D. O'Shea: Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 2nd edition, Springer, New York, 2005.
- D. Eisenbud. Commutative Algebra. With a View toward Algebraic Geometry, Springer, New York, 1995.
- A. Gathmann: Commutative Algebra, zapiski, 2013-14. `https://agag-gathmann.math.rptu.de/en/commalg.php`

Potrebno/pričakovano predznanje: Znanje iz predmeta Algebra 2 je potrebno, zaželjeno pa je tudi znanje Algebre 3.

Izvedba 3/2. Predavanja in vaje. Zimski semester.
Namesto kolokvijev domače naloge, ki jih je potrebno opraviti za pristop k izpitu. Izpit.

Jezik: slovenski ali angleški.

Teorija grafov

Vesna Iršič Chenoweth

Opis:

- Prirejanja in faktorji (največja in popolna prirejanja, stabilna prirejanja; Tuttov izrek; prirejanja v dvodelnih grafih; neodvisne množice in pokritja, Gallaijev izrek)
- Povezanost (2-povezani grafi, ušesna dekompozicija; k-povezanost, Mengerjev izrek; povezanost digrafov, Mengerjev izrek za digrafe)
- Barvanja grafov (meje za kromatično število, Brooksov izrek; struktura k-kromatičnih grafov, Turanov izrek; tetivni in popolni grafi; grafi povezav in barvanje povezav)
- Ravninski grafi (osnovni pojmi in rezultati, dualni grafi in triangulacije; izrek Kuratowskega in konveksne vložitve; barvanja ravninskih grafov in prekrižno število)
- Dominacija v grafih (meje za dominantno število; inačice dominacije; dominacija v kartezičnih produktih grafov in Vizingova domneva)

Literatura:

- A. Bondy, U.S.R. Murty: Graph Theory, Springer, Berlin, 2008.
- R. Diestel, Graph Theory, Springer, Berlin, 2005.
- D. West: Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005.

Pričakovano predznanje: Poznavanje osnov teorije grafov in kombinatorike v okviru vsebin predmeta Diskretna matematika 1 na prvostopenjskem študiju Matematike.

Ocenjevanje: Izpit iz vaj in izpit iz teorije.

Semester: poletni

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski ali angleški (odvisno od študentov pri predmetu)

Teorija Števil

Daniel Smertnig

Opis: Teorija števil je ena od klasičnih vej matematike, ki se ukvarja z aritmetiko celih števil in njihovimi posplošitvami. Algebraična teorija števil preučuje številska polja (končne razširitve $\mathbb{Q}$) in njihove kolobarje celih števil, kot sta $\mathbb{Z}[i]$ ali $\mathbb{Z}[\zeta]$, kjer je ζ koren enote, z orodji abstraktne algebre. Mnogi pojmi iz teorije kolobarjev in Galoisove teorije imajo namreč svoje zgodovinske korenine v teoriji števil. Poleg algebre praštevični izrek zagotavlja globoko aplikacijo kompleksne analize, medtem ko Minkowskijeva geometrija števil prinaša geometrijsko perspektivo, ki je temelj dveh glavnih izrekov o končnosti v algebraični teoriji števil.

Pojmi iz teorije števil so temelj številnih računsko težkih problemov, ki se uporabljajo v sodobni kriptografiji; kolobarji celih števil v ciklotomičnih poljih so na primer osrednji pri zasnovi nekaterih post-kvantnih kriptografskih shem, standardiziranih v zadnjih letih.

Razvili bomo osnovne pojme algebraične teorije števil, z manjšo prisotnostjo analitičnih metod v obliki praštevičnega izreka. Obravnavali bomo zlasti naslednje teme:

- praštevični izrek;
- številska polja, kolobarji algebraičnih celih števil, diskriminante, sledi in norme, integralne baze ter ulomljeni ideali, pa tudi sorodni algebraični pojem Dedekindovih kolobarjev;
- dva glavna izreka o končnosti: končnost razredne grupe in Dirichletov izrek o enotah (oba prek geometrije števil);
- neuspeh enolične faktorizacije in njegova odprava z ideali;
- razcep praštevil v številskih poljih.

Kvadratna in ciklotomična številska polja služijo kot zgledi skozi celoten predmet.

Literatura:

- Fröhlich, A., Taylor, M. J. *Algebraic number theory*, Cambridge University Press, 1990.
- Marcus, D. A. *Number Fields*, Springer, 2018 (2nd ed).
- Neukirch, J. *Algebraic number theory*, transl. from the German by Norbert Schappacher, Springer, 1999.

Pričakovano predznanje:
Algebra 1 in 2 sta obvezni predpogoj. Algebra 3 je priporočena, vendar ni strogo zahtevana, pod pogojem, da ste pripravljeni samostojno predelati osnovne rezultate o razširitvah polj in Galoisovi teoriji (pojavijo se kasneje pri predmetu), saj jih bomo le na kratko opomnili. Osnovna kompleksna analiza se uporabi pri praštevičnem izreku (manjši del predmeta).

Ocenjevanje: ustno (teorija) in pisno (vaje).

Semester: poletni

Tedenske ure: 3/2

Jezik: angleški

Analiza na mnogoterostih

Janez Mrčun

Opis: Mnogoterosti dimenzije n so topološki prostori, ki lokalno izgledajo kot prostor $\mathbb{R}^n$, njihove globalne lastnosti pa so lahko bolj zapletene. Enotska sfera v $\mathbb{R}^3$ je primer mnogoterosti dimenzije 2. Podobno kot na sferi lahko v okolici poljubne točke mnogoterosti izberemo lokalni koordinatni sistem, medtem ko globalni koordinatni sistem na celi mnogoterosti pogosto ne obstaja. Če izberemo lokalne koordinatne sisteme v okolicah vseh točk mnogoterosti tako, da so prehodne preslikave med njimi gladke, smo s tem izbrali gladko strukturo na mnogoterosti in dobimo *gladko mnogoterost*. Projektivni prostori in vse zaprte matrične grupe, kot sta recimo SU(2) in SO(3), so primeri gladkih mnogoterosti.

Mnoge klasične količine, ki jih poznamo iz diferencialnega računa funkcij več spremenljivk, se na naraven način transformirajo pri prehodu v nov koordinatni sistem, zato so v določenem smislu neodvisne od izbire koordinatnega sistema in jih lahko študiramo globalno na poljubni gladki mnogoterosti. Tako imamo na poljubni gladki mnogoterosti gladke funkcije, tangentne prostore ter tangentni sveženj, vektorska polja, tenzorska polja in diferencialne forme. Pod določenimi pogoji diferencialne forme lahko integriramo, s pomočjo vnanjega odvoda diferencialnih form pa izračunamo de Rhamovo kohomologijo mnogoterosti, ki nam da informacijo o globalnih topoloških lastnostih in je homotopska invarianta mnogoterosti.

Gladke mnogoterosti se pojavljajo in uporabljajo na mnogih področjih znanosti, še posebej seveda v geometriji in teoretični fiziki. Riemannove mnogoterosti, Liejeve grupe, homogeni prostori in foliacije so gladke mnogoterosti z dodatno geometrijsko strukturo. Tangentne in kotangentne svežnje na gladkih mnogoterostih uporabljamo za opis konfiguracijskih in faznih prostorov fizikalnih sistemov. Diferencialno enačbo lahko razumemo kot geometrijski problem iskanja prerezov ustreznega vektorskega svežnja, kar nam omogoča bolj sistematičen način obravnave njenih simetrij in ohranitvenih zakonov. Pogosto je lokalna rešljivost problema enostavna, bolj zapleteno pa je vprašanje, ali lahko lokalne rešitve sestavimo v globalno rešitev na celi mnogoterosti. Tako je na primer dokaj enostavno ugotoviti, ali je dano vektorsko polje lokalno potencialno, nekoliko težje pa, ali ima to vektorsko polje globalni potencial. Posredno na to vprašanje odgovori de Rhamova kohomologija.

Literatura:

- John M. Lee: Introduction to Smooth Manifolds, 2nd edition, Springer, New York, 2013.

Pričakovano predznanje: analiza funkcij več realnih spremenljivk, linearna algebra, splošna topologija

Ocenjevanje: domače naloge in ustni izpit

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski

Diferencialna geometrija

Pavle Saksida

Opis: Diferencialna geometrija se je razvila iz preučevanja Riemannovih mnogoterosti. Riemannova mnogoterost M je gladka (difereciabilna) mnogoterost, opremljena s strukturo, ki omogoča merjenje dolžin krivulj na M. Ta struktura se imenuje metrika.

Najstarejši problem diferencialne geometrije je iskanje geodetskih krivulj. Geodetska krivulja med izbranim parom točk na M je najkrajša med vsemi krivuljami, ki ta par točk povezujejo. Geodetske krivulje so rešitve navadne diferencialne enačbe drugega reda, ki jo določa metrika g na M. S pomočjo metrike g lahko konstruiramo diferencialni operator prvega reda ∇^g, ki vsakemu paru V, W vektorskih polj na M priredi natanko določeno vektorsko polje $Z = \nabla^g_W V$. Naj bo $\dot\gamma(t)$ hitrostno vektorsko polje krivulje $\gamma(t)$ na M. Krivulja γ je geodetska, če za njeno hitrostno polje velja $\nabla^g_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0$.

Operator ∇^g se imenuje kovariantni odvod. S pomočjo ∇^g definiramo Riemannovo ukrivljenost, ki je še en centralni pojem diferencialne geometrije. V primeru dvodimenzionalnih mnogoterosti ta pojem do neke mere ustreza našemu intuitivnemu dojemanju ukrivljenosti. Če pa je naša mnogoterost štiridimenzionalna in je opremljena s tako imenovano *psevdo* Riemannovo metriko g, nam ∇^g da ukrivljenost iz Einsteinove splošne teorije relativnosti.

Kovariantni odvod lahko definiramo v zelo splošnih kontekstih (na poljubnih glavnih ali vektorskih svežnjih nad mnogoterostjo M) in za to ne potrebujemo nujno metrike. Ti posplošeni kovariantni odvodi nam dajo tudi splošnejši pojem ukrivljenosti. Splošni kovariantni odvodi in njihove pridružene ukrivljenosti so najpomembnejše orodje v sodobni diferencialni geometriji, izredno pomembni pa so tudi v algebraični geometriji, v topologiji mnogoterosti in v mnogih vejah matematične fizike. Klasični primeri uporabe kovariantnega odvoda so na primer Foucaultovo nihalo, razlaga dejstva, da maček pri padcu vedno pristane na nogah, Aharonova-Bohmov pojav in mnogi drugi.

Pri predmetu študentje spoznajo osnovno teorijo kovariantnega odvoda. V uvodnih poglavjih ponovimo osnovne pojme teorije gladkih mnogoterosti, nato pa se posvetimo obravnavi vektorskih in glavnih svežnjev. Glavnina predmeta je posvečena predstavitvi kovariantnega odvoda. Spošno teorijo nato uporabimo pri obravnavi osnovnih dejstev Riemannove geometrije. Če bo čas dopuščal, bomo opisali še konstrukcijo Chernovih razredov. Ti so pomembne topološke invariante mnogoterosti, konstruirane s pomočno kovariantnega odvoda.

Literatura:

- Loring W. Tu, *Differential Geometry*, Springer 2017
- S. Kobayashi , T. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, vol. 1*, Wiley, 1996
- P. Saksida, *Diferencialna geometrija*, https://users.fmf.uni-lj.si/saksida/DifGeomC1.pdf

Pričakovano predznanje: Potrebno je solidno razumevanje osnovne teorije navadnih in parcialnih diferencialnih enačb. Koristno, vendar ne nujno, je poznavanje vsebine predmeta Uvod v diferencialno geometrijo. Za študente, ki nameravajo izbrati predmet Diferencialna geometrija, je koristno tudi poznavanje vsebine predmeta Analiza na mnogoterostih.

Ocenjevanje: Pisni izpit: dva sklopa domačih nalog. Ustni izpit.

Semester: poletni

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski ali angleški (odvisno od študentov pri predmetu)

Topologija v robotiki

Petar Pavešić

Opis: Predstavili bomo uporabo topoloških metod pri reševanju nekaterih problemov v robotiki. Obravnavali bomo naslednje teme: konfiguracijski in delovni prostor robota; kinematične preslikave in inverzne kinematične preslikave ter njihove singularnosti; načrtovanje gibanja, topološka kompleksnost načrtovanja in manipulacije v robotiki; homotopska invariantnost topološke kompleksnosti, spodnje in zgornje ocene za kompleksnost.

Literatura:

- M. Farber, Invitation to topological robotics, European Mathematical Society, 2008.
- M. Farber, J. Gonzalez, Topology and AI, Topological Aspects of Algorithms for Autonomus Motion, EMS Series in industrial and applied mathematics, 2024.
- P. Pavešić, A Topologist's View of Kinematic Maps and Manipulation Complexity, Contemp. Math. 702 (2018), 61–83.
- A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press 2002.

Pričakovano predznanje: Pri delu obravnavanih tem bomo potrebovali nekatere tehnike iz algebraične topologije (pojem homotopije, osnovne homotopske konstrukcije, (ko)homologija), ki jih bomo po potrebi povzeli v teku predmeta.

Ocenjevanje: Pri predmetu bo, odvisno od konkretnega problema, potrebno pripraviti in predstaviti manjši projekt oziroma seminarsko nalogo.

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski ali angleški (odvisno od študentov pri predmetu)

Iterativne numerične metode v linearni algebri

Bor Plestenjak

Opis: Številne aplikacije vodijo do problemov z velikimi in pogosto razpršenimi matrikami, pri katerih standardne metode numerične linearne algebre, kot sta LU razcep za reševanje linearnih sistemov in QR iteracija za računanje lastnih vrednosti, postanejo prepočasne ali porabijo preveč pomnilnika. Spoznali bomo sodobne pristope, ki omogočajo numerično reševanje velikih sistemov linearnih enačb ter računanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev velikih matrik.

Osrednji temi predmeta bosta iterativno reševanje sistemov linearnih enačb, kjer dobimo zaporedje približkov, ki konvergirajo k točni rešitvi, ter računanje izbranih lastnih vrednosti ter lastnih vektorjev velikih matrik. Spoznali bomo metode podprostorov Krilova, med katere spada znana metoda konjugiranih gradientov, predpogojevanje in orodja iz verjetnostne numerične linearne algebre. Pri slednjih z uporabo naključnih projekcij probleme pretvorimo v probleme z manjšimi matrikami, iz katerih dobimo rešitve, ki se z veliko verjetnostjo ne razlikujejo veliko od točnih.

Metode za velike in razpršene matrike bomo razvijali in testirali v programu Matlab.

Literatura: Na strani `http://www.fmf.uni-lj.si/~plestenjak/Vaje/INMLA/inmla.htm` sta na voljo skripti predavanj in vaj ter spisek druge literature.

Pričakovano predznanje: Študenti 1. stopnje Matematike oz. Finančne matematike dobite potrebno predznanje pri obveznih numeričnih predmetih na 1. stopnji Matematike oz. Finančne matematike. Pri matematikih vam pride prav (gre pa tudi brez tega) znanje predmeta Numerična linearna algebra. Študenti IŠRM, ki niste izbrali Numeričnih metod 2, boste morali prebrati kaj o računanju lastnih vrednosti matrik.

Ocenjevanje: domače naloge (30%), pisni izpit (40%) in ustni izpit (30%)

Semester: poletni

Tedenske ure: 2/1/2

Jezik: slovenski ali angleški (odvisno od študentov pri predmetu)

Numerična integracija in navadne diferencialne enačbe

Jan Grošelj

Opis: Predmet obravnava snov, ki v uporabno smer nadgrajuje poznavanje matematike na področju integracije in reševanja navadnih diferencialnih enačb. Slušatelja vpelje v numerične metode, njihovo analizo in implementacijo ter spozna s praktičnimi problemi, kjer se posamezni pristopi posebej odlikujejo. S tem nudi dobro podporo reševanju raznovrstnih praktičnih problemov na tehničnem, finančnem, družboslovnem in drugih področjih.

Obravnavane bodo naslednje teme: numerično odvajanje, Newton-Cotesova pravila in njihova nadgradnja, Gaussova pravila, integracija v več spremenljivkah, metode tipa Monte Carlo, reševanje navadnih diferencialnih enačb, začetni problemi, enočlenske in veččlenske metode, toge diferencialne enačbe, robni problemi in diferenčna metoda.

Literatura:

- Jernej Kozak: *Numerična analiza*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008.
- Bor Plestenjak: *Razširjen uvod v numerične metode*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2015.
- Kendall E. Atkinson: *An introduction to numerical analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

Pričakovano predznanje: Koristno je znanje snovi predmeta *Numerična aproksimacija in interpolacija*.

Ocenjevanje: Dve domači nalogi, pisni in ustni izpit. Domači nalogi se preverjata v obliki kvizov in upoštevata pri oceni pisnega dela izpita. Po opravljenem pisnem izpitu je potrebno opraviti še ustni del izpita.

Semester: zimski

Tedenske ure: Predavanja in vaje v obsegu 3/2.

Jezik: slovenski

Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje

Marjetka Knez

Opis: Pri računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju (ang. Computer Aided Geometric Design) se ukvarjamo z matematičnim opisom objektov za uporabo pri numerični aproksimaciji krivulj in ploskev, pri numerični analizi ter v računalniški grafiki. Področje je matematične narave, a je usmerjeno v uporabo na različnih inženirskih področjih. Gre za razvoj in študij matematičnih metod za predstavitev in delo s krivuljami, ploskvami ter tridimenzionalnimi telesi in nam daje osnovo za računalniško podprto oblikovanje (CAD), proizvodnjo (CAM) in delo s parametrično predstavljenimi objekti v industriji (načrtovanje oblike izdelkov, vodenje robotov, strojna proizvodnja izdelkov, modeliranje in simulacije).

Pri predmetu se bomo najprej spoznali z Bézierjevimi krivuljami, ki predstavljajo osnovno orodje za opis enodimenzionalnih objektov s pomočjo polinomskih parametričnih krivulj. Ogledali si bomo njihove lastnosti ter različne algoritme za delo s temi krivuljami. V nadaljevanju bomo obravnavali zlepke iz Bézierjevih krivulj, geometrijsko zveznost ter racionalne Bézierjeve krivulje. Znanje bomo posplošili tudi na parametrično podane ploskve, pri čemer bomo spoznali Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta ter trikotne Bézierjeve krpe. Na kratko si bomo ogledali tudi konstrkcijo gibanj togih teles ter subdivizijske sheme. Teorijo, ki jo bomo spoznali pri predavanjih, bomo na vajah podkrepili s praktičnimi zgledi s pomočjo implementacije izpeljanih algoritmov, pri čemer bomo uporabljali programski paket Matlab.

Literatura:

- G. Farin, *Curves and surfaces for CAGD, A Practical Guide*, 5th ed., Morgan Kaufmann, 2002.
- G. Farin, J. Hoschek, M.-Soo Kim, *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, Amsterdam [etc.]: Elsevier, cop. 2002.
- M. J. Lai, L. Schumaker, *Spline functions on triangulations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

Pričakovano predznanje: Poznavanje osnov numerične matematike in Matlaba.

Ocenjevanje: Ocena bo sestavljena iz treh delov:

- Dva kviza. Rezultati kvizov prinesejo 30 % h končni oceni.
- Seminarska naloga s predstavitvijo, ki prinese 35 %.
- Teoretični test oziroma ustni zagovor, ki prinese 35 %.

Semester: zimski

Tedenske ure: Predmet se bo izvajal s 3 urami predavanj in 2 urama vaj, ki bodo potekale v računalniški učilnici. Zadnji trije tedni semestra bodo namenjeni predstavitvam seminarskih nalog.

Jezik: slovenski

Actuarial mathematics – Life insurance

Mario Marino[1]

Contents:

(1) *Introduction to life insurance*: biometric risks, financial risks and insurance products.

(2) *Modeling the lifetime*: survival models, mortality laws, life tables, mortality heterogeneity and stochastic mortality dynamics.

(3) *Valuation of insurance benefits*: random present values and actuarial values for different life insurance products and life annuities.

(4) *Pricing life insurance contracts*: the equivalence principle and premium calculation, single premiums, periodic premiums, and expense loadings

(5) *Reserving and policy value*: the actuarial accumulation process and the policy reserve, recursive equations, risk premium and savings premium, expected profit analysis and introductory principles of profit testing.

(6) *Multi-state models and state-dependent benefits*: the Markov model and the evolution of a risk: states, transitions, and cash-flows; increment-decrement tables; distributions of random present values and actuarial values: premiums, reserves, expected profits.

For topics (2) - (6) both time-continuous and discrete time modeling approacches will be considered.

Literature:

- Olivieri, A., Pitacco, E. (2015), *Introduction to Insurance Mathematics. Technical and Financial Features of Risk Transfers*, 2nd Edition, EAA Series Springer. (chapters 3-7)
- Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., Waters, H. R. (2019). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks* (3rd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. (chapters 1-10, 12-13)

Prerequisites: Students are required to have successfully completed a course in probability theory and statistics.

Assessment: Written examination, computer lab homework for the seminar part.

Semester: Spring

Weekly hours: There will be 30 hours of lectures and 30 hours of tutorials. The seminar part of the course (15 teaching hours) will be conducted in collaboration with the Slovenian Actuarial Society.

Language: English

[1]Assistant Professor, 1Department of Economics, Business, Mathematics and Statistics "Bruno de Finetti", University of Trieste, Italy

Finančna matematika 2

Mihael Perman

Opis: Večji del predmeta je namenjen izgradnji matematičnih orodij, potrebnih za obravnavo vrednotenja izvedenih vrednostnih papirjev v zveznem času. V zaključnem delu pridejo na vrsto temeljne ideje vrednotenja s konkretnimi primeri izračunov. Bolj podrobna vsebina je navedena spodaj.

1. Sredstva iz analize in verjetnosti.
1.1 Funkcije z omejeno totalno variacijo.
1.2 Lebesgue-Stiltjesov integral.
1.3 Konvergenca v L^2 prostorih.
1.1 Maksimalne neenakosti za diskretne martingale.
2. Brownovo gibanje.
2.1 Motivacija in definicija.
2.2 Markovska in krepka markovska lastnost, princip zrcaljenja.
2.2 Brownovi martingali.
2.3 Martingali v zveznem času, kvadratična variacija.
2.4 Izrek o opcijskem ustavljanju v zveznem času.
3. Itôv integral.
3.1 Konstrukcija, Itôva izometrija, osnovne lastnosti.
3.2 Itôva lema in uporabe.
3.2 Lokalizacija in lokalni martingali.
3.2 Integral glede na lokalni martingal
3.2 Splošna Itôva formula.
4. Vrednotenje izvedenih vrednostnih papirjev.
4.1 Samofinancirajoče strategije in varovanje.
4.2 Black-Sholesov model.
4.3 Zamenjava mere, izrek Girsanova.
4.3 Primeri izračuna za izbrane opcije.

Literatura:

D. Lamberton, B. Lepeyre, Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman & Hall, 2000.
S. E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models, Springer, 2004.
T. Björk, Arbitrage Theory in Continuous Time, 3rd Edition, Oxford, 2009.

Pričakovano predznanje: Analiza 2: parcialno odvajanje, integracija funkcij več spremenljivk in integrali s parametrom. Verjetnost: neodvisnost, pričakovana vrednost, osnovne porazdelitve, pogojne porazdelitve in pogojna pričakovana vrednost, diskretni martingali. Teorija mere: abstraktni integral, izreka o monotoni in dominirani konvergenci, Fubinijev izrek, Radon-Nikodýmov izrek, L^p prostori. Finančna matematika 1: modeli gibanja cen, definicija izvedenih vrednostnih papirjev, princip ene cene, ekvivalentne mere in kompletnost modelov.

Ocenjevanje: 50% pisni izpit, 50% seminarska naloga.

Semester: Zimski.

Tedenske ure: 3/2

Jezik: Praviloma slovenski, angleška izvedba, če je več Erasmus študentov.

Financial mathematics 3 (Interest rate theory)

József Gáll[2]

The aim of the course: The aim of the course is to discuss modern interest rate models, bond market structures and interest rate related financial assets, such as interest rate and bond derivatives. We discuss several fundamental and widely used interest rate models of the literature: on the one hand both in discrete and in continuous time settings, on the other hand we study short rate and forward interest rate models. Our aim is to show some important results of financial mathematics on this area (e.g. no-arbitrage conditions, asset pricing, fundamental properties and comparison of the models) and also to study specific statistical, practical, economic and financial questions in the models at issue, which may occur in applications.

Content: Basic notions, interest rates, yield curves, bond structures, interest rate derivative contracts. Discrete time interest rate models. The Ho-Lee model, binary models introduced by short rate dynamics. Discrete time forward interest rate models, the Heath-Jarrow-Morton (HJM) framework. No-arbitrage conditions, derivative pricing. Continuous interest rate models, arbitrage free family of bond prices, classification of models. Change of numeraire, no-arbitrage in continuous time, forward measures, related stochastic calculus. Some elementary short rate models (Merton, Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross, Hull-White), noarbitrage in short rate models, affine term structures. HJM type models in continuous time settings, no-arbitrage criteria and drift conditions. Some special topics: forward rate models driven by random fields, expectation hypotheses, defaultable bonds, pricing problems of certain interest rate derivatives, statistical and fitting questions, calibration and numerical issues. We shall show some examples and scripts written in R in the discussed models, such as examples for the bond market structures under different parametrisations, price and interest rate process evolvements. Furthermore, we discuss some fitting and estimation problems for practice. For the discussion of the fundamental models and theorems we shall mainly use classical monographs such as [1], [2], [3] and some further handouts. On the other hand, we shall also discuss some particular problems in special models for which selected (celebrated) papers of the literature shall be used.

Literature:

- Cairns, A.J.G. (2004), Interest Rate Models, Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- Brigo, D. and Mercurio, F. (2006), Interest Rate Models – Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit, Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Musiela, M. and Rutkowski, M. (2005), Martingale Methods in Financial Modelling, Edition 2, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Prerequisites: It is required that you passed a course (or courses) in probability theory, statistics and stochastic processes, and recommended that you passed an introductory course in financial mathematics (fundamental theorems of asset pricing, basic notions and models of option pricing).

Assessment: Written examination.

Semester: Spring 2027

Weekly hours: 2/1/2

In total, there will 30 hours of lectures, 30 hours of tutorial and 15 hours of seminar

Language: English

[2]Associate professor, Department of Applied Mathematics and Probability Theory, Faculty of Informatics, University of Debrecen, Hungary, jozsef.gall@inf.unideb.hu

Optimization in finance

Nacira Agram[3]

Outline: 1) Theoretical part:

a) Stochastic differential equations and backward stochastic differential equations. Existence and uniqueness. Application to finance, including modelling stock prices, hedging strategies, and dynamic risk measures.

b) Stochastic optimal control, dynamic programming (HJB equation) and Pontryagin's stochastic maximum principle. Examples in finance such as consumption and portfolio optimization are studied.

2) Numerical part:

a) Numerical solutions for stochastic differential equations and backward stochastic differential equations. Euler-Maruyama scheme and simulation of stochastic processes. Conditional expectation estimation.

b) Solving optimal stochastic control problems using deep supervised learning algorithms using Pytorch library in Python.

Literature:

- Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. Springer, 2013.
- Laurent Mazliak. An introduction to probabilistic methods in stochastic control. Lectures at Pescara University, April 1996.
- Kloeden, P. E., & Platen, E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer. 1992
- Murphy, K. P. Machine Learning: A Probabilistic Perspective. MIT Press. 2012

Prerequisites: A listener should be familiar with stochastic processes in continuous time and stochastic integration. A basic programming proficiency is also assumed. Some familiarity with machine learning is desirable but not required.
Required courses: Finančna matematika 2, Uvod v programiranje.

Assessment: Written examination, homeworks.

Semester: Spring

Weekly hours: 3/2
Professor Agram will give 30 hours of lectures and 12 hours of seminar. Assistant Jan Rems will conduct 30 hours of tutorials. Three teaching hours of the seminar will be conducted in collaboration with industry.

Language: English

[3]KTH University, Stockholm, Sweden, e-mail: nacira@kth.se

Slučajni procesi 2

Matija Vidmar

Opis: Prvi cilj je študij teorije (sub-/super-)martingalov: filtracije in časi ustavljanja (opcijski časi); opcijsko vzorčenje in ustavljanje; maksimalne neenakosti in neenakosti navzgornjega prečkanja; konvergenčni izreki; regularizacija vzorčnih poti. Druga sestavina predmeta so osnove tako imenovane splošne teorije stohastičnih procesov: progresivna, predvidljiva in opcijska sigma-algebra; klasifikacija časov ustavljanja; début, sekcijski in projekcijski izreki; Doob-Meyerjeva dekompozicija. Končno, kolikor bo dopuščal čas, si ogledamo ključne elemente stohastične integracije: kvadratična variacija zveznih lokalnih martingalov, integracija proti zveznim semimartingalom, Itôva formula; integrali proti splošnim semimartingalom, izrek Bichteler-Dellacherieja.

Literatura:

- Olav Kallenberg: Foundations of modern probability, Springer Cham, 2021 [v relevantnih delih].

Pričakovano predznanje: Osnove mersko-teoretične verjetnosti ali vsaj teorije mere, vključno s pogojnim matematičnim upanjem (vsebina arXiv e-printa arXiv:2604.01685 zadošča). Poznavanje bolj osnovnih pojmov/rezultatov (dodiplomskega) verjetnostnega računa (npr. Borel-Cantellijevih lem, neodvisnosti, karakterističnih funkcij ipd.).

Ocenjevanje: Pisni izpit iz vaj; pisni ali ustni izpit iz predavanj (bo še določeno).

Semester: Drugi.

Tedenske ure: 3/2.

Jezik: Slovenski ali angleški, po dogovoru (avtomatično angleški, če se bodo predmeta udeležili študenti, ki bodo bili predmet vpisali pa ne znajo slovensko).

Statistika 2

Jaka Smrekar

Opis: Statistika je izjemno pomembno področje s širokim spektrom uporabe v financah, medicini, računalništvu, umetni inteligenci in drugod. Cilj predmeta je strukturiran pregled nekaterih temeljnih metod sklepne statistike s poudarkom na uporabnosti.

(1) **Uvod.** Zadostnost, kompletnost, eksponentne družine porazdelitev.
(2) **Točkovno ocenjevanje parametrov.** Optimalne nepristranske cenilke. Ocenjevanje v linearnih modelih. Asimptotične lastnosti cenilk, asimptotične lastnosti cenilk v linearnih modelih.
(3) **Metoda največjega verjetja.** Osnovne definicije in primeri. Asimptotične lastnosti. Cenilka največjega verjetja v posplošenih linearnih modelih in njene asimptotične lastnosti.
(4) **Preizkušanje domnev.** Enakomerno najmočnejši preizkusi in Neyman-Pearsonov okvir. Preizkušanje v eksponentnih in normalnih modelih. Preizkušanje v normalnem linearnem modelu. Preizkušanje na podlagi razmerja verjetij, preizkusi neodvisnosti in homogenosti. Preizkušanje v neparametričnih modelih, ranžirni preizkusi.
(5) **Območja zaupanja.** Konstrukcija: pivotna funkcija, inverzija območja nezavrnitve. Lastnosti območij zaupanja.

Literatura:

- G.G. Roussas: A course in mathematical statistics, 2nd edition, Academic Press, 1997.

Priovano predznanje: Verjetnostni račun 1 in Statistika 1 oziroma Verjetnost in Statistika.

Ocenjevanje: pisni izpit, ustni izpit

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski

VERJETNOST 2

Martin Raič

Opis:

Markovske verige v diskretnem času: Slučajni procesi v diskretnem času – obstoj in enoličnost. Markovska lastnost in prehodne verjetnosti. Časi ustavljanja, njihovi tipični primeri in protiprimeri. Krepka markovska lastnost. Markovske verige s prostim začetnim stanjem. Inducirane porazdelitve, stacionarna porazdelitev. Inducirane mere, stacionarna mera. Reverzibilnost – pogoj točne izravnave. Komunikacija med stanji. Minljivost in povrnljivost, pozitivna in ničelna povrnljivost. Fundamentalni razcep prostora stanj. Dolgoročni delež obiska stanja. Karakterizacija in obstoj stacionarnih porazdelitev; konstrukcija stacionarnih mer. Periodičnost stanj. Limitni izreki: ergodičnost, krepki zakon velikih števil. Posebnosti v končnem.

Markovske verige v zveznem času: Dogovori o regularnosti. Markovska lastnost in prehodne verjetnosti v zveznem času. Enačbe Chapmana in Kolmogorova, polgrupna lastnost. Časi ustavljanja, krepka markovska lastnost. Čas prvega skoka, intenzivnost skoka, prehodne verjetnosti skokov. Vpeta skočna veriga. Infinitezimalno obnašanje, generator verige. Rojstni procesi in fenomen eksplozije. Obstoj in enoličnost, simulacija markovskih verig v zveznem času. Komunikacija med stanji. Minljivost in povrnljivost, pozitivna in ničelna povrnljivost. Stacionarna porazdelitev in mera. Reverzibilnost. Limitni izreki: ergodičnost, krepki zakon velikih števil.

Uporaba markovskih verig: Čakalni sistemi (rojstno-smrtni čakalni sistem, čakalni sistem $M/M/1$, osnovni pojmi teorije strežnih sistemov, nekateri pomembni primeri čakalnih sistemov). Metoda Monte Carlo na temelju markovskih verig (bayesovska statistika in simulacije Monte Carlo, Gibbsov vzorčevalnik in Metropolis–Hastingsov algoritem, konvergenca algoritmov, uporaba v finančni matematiki).

Literatura:

- J. R. Norris: *Markov Chains.* Cambridge University Press, 1999.
- R. Durrett: *Essentials of Stochastic Processes.* Springer, New York, 2004.
- S. I. Resnick: *Adventures in Stochastic Processes.* Birkhäuser, 1992.
- L. C. G. Rogers, D. Williams: *Diffusions, Markov processes and Martingales. Vol. 1: Foundations.* Druga izdaja, Cambridge University Press, 2000.
- G. Grimmett, D. Stirzaker: *Probability and Random Processes.* 3rd ed. Oxford University Press, 2001, 2009.

Pričakovano predznanje: elementarna verjetnost, osnovne navadne diferencialne enačbe.

Ocenjevanje: Način: pisni izpit, ki ga je možno nadomestiti z dvema kolokvijema, ustni izpit, ki ga je možno delno nadomestiti s pisnimi teoretičnimi testi. Ocene: 1–5 (negativno), 6–10 (pozitivno) (po Statutu UL).

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski ali angleški (odvisno od študentov pri predmetu).

Izbrana poglavja iz optimizacije

Izvajalec: Nino Bašić

Opis: Optimizacijski kombinatorični problemi se pojavljajo na številnih področjih matematike in računalništva. Rešujemo jih lahko s splošnimi metodami matematičnega programiranja ali s specializiranimi algoritmi, ki izkoriščajo strukturo problema. Pri predmetu bomo obravnavali izbrane metode diskretne optimizacije in njihovo uporabo pri problemih pokrivanja, celičnih avtomatih ter risanju grafov, s poudarkom na matematičnem modeliranju in primerjavi različnih pristopov. Študenti bodo pri tem predmetu spoznali:

(1) **Celoštevilsko programiranje**: binarne in mešane celoštevilske formulacije, linearno relaksacijo, celoštevilsko vrzel, moč formulacije, odpravljanje simetrij.
(2) **Veljavne neenakosti in poliedrske metode**: celoštevilska ovojnica, pokritvene neenakosti, Gomoryjevi in Chvátal-Gomoryjevi rezi.
(3) **Problemi pakiranja, pokrivanja in razbitja**: formulacije *set packing*, *set covering* in *set partitioning*, problem eksaktnega pokritja, pokrivanje območij s ploščicami.
(4) **Algoritem X in Dancing Links**: Knuthov algoritem za problem eksaktnega pokritja, primerjava s celoštevilskim programiranjem in drugimi splošnimi metodami.
(5) **Inverzni problemi pri celičnih avtomatih**: matematično modeliranje Conwayjeve igre življenja, iskanje predhodnikov dane konfiguracije in periodičnih vzorcev, primerjava celoštevilskih, logičnih in specializiranih formulacij.
(6) **Optimizacijske metode za risanje grafov**: merila kakovosti risb, energijski in stresni modeli, vzmetne oziroma silno usmerjene metode, Fruchterman-Reingoldov in Kamada-Kawaijev algoritem.
(7) **Planarnost in ravninske vložitve grafov**: kombinatorične vložitve, rotacijski sistemi in lica, testiranje planarnosti in konstrukcija vložitve, certifikati (ne)planarnosti, Fáry-Wagnerjev izrek, Tuttejeva baricentrična metoda.
(8) **Računalniška izvedba in primerjava metod**: uporaba programskih orodij za matematično optimizacijo, implementacija izbranih algoritmov, eksperimentalna primerjava splošnih optimizacijskih in specializiranih kombinatoričnih metod.

Globina obravnave posameznih vsebin se bo prilagajala interesom študentov; nekateri sklopi bodo obravnavani podrobneje, drugi pa bolj konceptualno in na ravni izbranih primerov.

Literatura:

- L. A. Wolsey: *Integer Programming*, Wiley, 2020.
- B. Korte, J. Vygen: *Combinatorial Optimization*, Springer, 2018.
- R. Tamassia: *Handbook of Graph Drawing and Visualization*, Chapman & Hall/CRC, 2014.

Pričakovano predznanje: Osnovno znanje linearne algebre, teorije grafov, algoritmov in podatkovnih struktur ter programiranja. Priporočeno je poznavanje osnov linearnega programiranja v obsegu predmetov prve stopnje (Optimizacijske metode ali Optimizacija 1).

Ocenjevanje: domače naloge (od tega ena projektna naloga), pisni izpit (ali dva kolokvija).

Semester: poletni

Tedenske ure: 3/2

Jezik: slovenski

Računalniške metode v teoriji grup

doc. dr. Micael Alexi Toledo Roy

Opis: Predmet uvaja teorijo grup od osnovnih pojmov naprej ter hkrati razvija praktične spretnosti uporabe sistema za računalniško algebro GAP. Študenti bodo spoznali temeljne pojme in metode teorije grup ter njihovo algoritmično implementacijo za reševanje problemov v algebri. Teoretične vsebine bodo ves čas spremljale praktične vaje v sistemu GAP, pri katerih bodo študenti sproti implementirali obravnavane matematične koncepte.

Literatura:

- An Introduction to the Theory of Groups, Joseph J. Rotman, Springer, 1995.
- GAP - Reference Manual.

Pričakovano predznanje: Osnovno predznanje iz algebre in programiranja

Ocenjevanje: Teoretični izpit in domače naloge (programiranje)

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: Angleščina

Logika

Alex Simpson

Opis: Predmet se ukvarja z logiko prvega reda, in sicer s teorijo dokazov in teorijo modelov, ki nas pripelje do znanega Gödelovega izreka nepopolnosti.

Gradiva vplivajo na osnove matematike, na matematično sklepanje, na pojem matematične resničnosti in na potrebo po ustvarjalnosti v matematiki. Gödelov *izrek popolnosti* dokaže, da lahko popolnoma razumemo pravilne metode sklepanja na podlagi aksiomov. Njegov *izrek nepopolnosti* pravi, da ne moremo najti izbor aksiomov, s katerim lahko dokažemo vse resničnosti matematike. Poleg tega Church-Turingova *izrek neodločnosti* pravi, da ne obstaja algoritem, ki avtomatično presodi, če matematična izjava velja.

(1) Logika prvega reda.
(2) Primeri teorij prvega reda in odprava kvantifikatorjev.
(3) Pravila sklepanja in Gödelov izrek popolnosti.
(4) Kompaktnost, Löwenheim-Skolemov izrek, osnove teorije modelov.
(5) Teorija aritmetike in Church/Turingov izrek neodločnosti.
(6) Gödelov izrek nepopolnosti.

Literatura:

- N. Prijatelj: Osnove matematične logike, 2. del: Formalizacija, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1992.
- N. Prijatelj: Osnove matematične logike, 3. del: Aplikacija, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1994.
- W. Rautenberg: A Concise Introduction to Mathematical Logic. Universitext, 2009.

Pričakovano predznanje: Opravljen predmet Logika in množice iz 1. letnika ali ekvivalentno znanje.

Ocenjevanje: Pisni in ustni izpit.

Semester: Poletni.

Tedenske ure: 3/2

Jezik: Slovenski ali angleški

Napredno strojno učenje

Ljupčo Todorovski

Opis: Cilj predmeta je spoznavanje naprednih metod strojnega učenja (SU): po eni strani razumevanje njihove zgradbe in delovanja, po drugi pa uporabnost za reševanje praktičnih problemov. Predmet zajema izbor treh do štirih vsebinskih sklopov. Izbor je prilagojen aktualnim in najbolj relevantnim rezultatom v okviru posameznega sklopa. Sledi okvirni predviden izbor štirih sklopov za naslednje študijsko leto.

(1) **Globoko SU**: napredne arhitekture nevronskih mrež (NM), od rekurentnih NM do mehanizmov pozornosti in transformerjev, grafovske in rekurzivne NM za strukturalne podatke, ter metode za izboljšanje učenja NM.
(2) **Generativni modeli**: sposobnost generiranja novih podatkovnih primerov, ki so podobni tistim v učni množici, paradigme generativnega modeliranja, vključno z variacijskimi samokodirniki (VAE) in generativimi nasprotujočimi si mrežami (GAN).
(3) **Odkrivanje enačb oz. simbolna regresija**: algoritmi za samodejno odkrivanje (strojno učenje) strukture in parametrov matematičnih modelov iz podatkov, paradigme evolucijske optimizacije, verjetnostih kontekstno-neodvisnih gramatikah, generativnih modelov in stohastičnega preiskovanja.
(4) **Meta učenje in samodejno SU**: strojno učenje iz rezultatov strojnega učenja, ki pomaga izbirati optimalne algoritme in hiperparametre za reševanje novih problemov, paradigme meta učenja, samodejnega strojnega učenja in optimizacije hiperparametrov.

Literatura:

- Prince, S. J. D. (2023) *Understanding Deep Learning*. MIT Press. Dostopna na `https://udlbook.github.io/udlbook/`
- Tomczak, J. M. (2022) *Deep generative modeling*. Springer.
- Mežnar, S., Džeroski, S. in Todorovski, L. (2023) Efficient generator of mathematical expressions for symbolic regression. *Machine Learning, 112(10)*: 4563–4596. DOI: 10.1007/s10994-023-06400-2
- He, X., Zhao, K., Chu, X. (2021) AutoML: A survey of the state-of-the-art. *Knowledge-Based Systems, 212*: 106622. DOI: 10.1016/j.knosys.2020.106622. Dostopno na `https://arxiv.org/abs/1908.00709`

Pričakovano predznanje: Programiranje v programskem jeziku Python, poznavanje osnovnih metod strojnega učenja, ki ga študenti pridobijo pri izbirnem predmetu na prvi stopnji *Izbrana poglavja iz analize podatkov*.

Ocenjevanje: Domače naloge in ustni izpit. V primeru večjega števila prijavljenih študentov, možnost pisnega izpita.

Semester: zimski

Tedenske ure: 2/1/2

Jezik: slovenski

Računska Geometrija

Sergio Cabello

Opis: Predmet krije osnovne algoritme računske geometrije. Računska geometrija se ukvarja z računskimi problemi, kjer imajo vhodni podatki geometrijski pomen. Na predavanjih bomo podrobno obravnavali naslednje probleme:

- Presečišča daljic. Algoritmi pometanja.
- Večkotniki in triangulacije večkotnikov.
- Konveksne množice. Algoritme za iskanje konveksne ovojnice točk v ravnini.
- DCEL. Problem določanja položaja.
- Voronojevi diagrami. Fortuneov algoritem.
- Delaunayeva triangulacija v ravnini. Prirastni algoritem. Interpretacija v 3 dimenzijah.
- Podatkovne strukture za točke.
- Dualnost in razporeditve premic.

Na seminarju bomo spoznali štiri dodatne teme, ki se določijo kasneje in so lahko vsako leto različne.

Literatura:

- Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, Mark Overmars: Computational geometry: algorithms and applications, Springer 2008.
- Je veliko dobrih zapiskov in drugih primernih materialov na voljo.

Pričakovano predznanje: Osnovno znanje o algoritmih in podatkovnih strukturah.

Ocenjevanje:

- Obveznosti študentov: sodelovanje pri seminarju, pisni izpit iz vaj in ustni izpit.
- Znanje o seminarju se preveri tudi pri ustnem izpitu. Pri tem vsak(a) študent(ka) zmanjša vsebino na dve temi po izbiri.
- Ocena bo upoštevala izpit iz vaj (∼40%), seminar (∼20%) in ustni izpit (∼40%).

Semester: zimski

Tedenske ure: 2/1/2 v povprečju. Seminar se izvede v triurnih blokih.

Jezik: angleški, odvisno od prisotnih študentov. Ustni izpit lahko poteka v slovenskem ali angleškem jeziku.

Simbolno računanje

Daniel Smertnig

Opis:

Simbolno računanje (znano tudi kot računalniška algebra) se ukvarja z natančnim, algoritmičnim predstavljanjem in manipulacijo matematičnih objektov, kot so polinomi, racionalne funkcije in formalni izrazi, v nasprotju z numeričnimi metodami, ki delajo s približki v plavajoči vejici. Zagotavlja temeljne algoritme za sisteme računalniške algebre, kot so Oscar, SageMath, GAP, PARI/GP in drugi.

Načrtujemo obravnavo naslednjih tem:

- prepisovalni sistemi (redukcijske relacije, Newmanova lema, problem napolnitve);
- operacije s polinomi (modularna aritmetika, Henslov dvig, razcep in razstavljanje polinomov);
- operacije s polinomskimi ideali (monomske urejenosti, Gröbnerjeve baze, reševanje sistemov algebraičnih enačb);
- reševanje linearnih diferenčnih in diferencialnih enačb (polinomske rešitve, hipergeometrične in hipereksponentne rešitve).

Če bo čas dopuščal, bomo obravnavali tudi nekatere dodatne ključne algoritme, kot je algoritem LLL za redukcijo baze mrež.

Literatura:

- Cox, D., Little, J., O'Shea, D. *Ideals, varieties, and algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 5th ed., Springer, 2025.
- von zur Gathen, J., Gerhard, J. *Modern Computer Algebra*, 3rd ed., Cambridge University Press, 2013.
- Kauers, M., Paule, P. *The concrete tetrahedron: Symbolic sums, recurrence equations, generating functions, asymptotic estimates.*, Springer, 2011.

Pričakovano predznanje: Poznavanje osnovnih struktur iz abstraktne algebre (zlasti polinomskih kolobarjev in idealov).

Ocenjevanje: Ustno (teorija) in praktično domače/projektno delo.

Semester: poletni

Tedenske ure: 2/1/2

Jezik: Angleščina, morda z nekaterimi slovenskimi elementi.

Teorija izračunljivosti

Alex Simpson

Opis: Predmet obravnava temeljno vprašanje: kakšne vrste problemov so izračunljive. Začeli bomo z različnimi matematičnimi definicijami pojma *izračunljivosti*, ki so jih predlagali matematiki v tridesetih letih prejšnjega stoletja. Ključni rezultat je, da so vse definicije ekvivalentne. To dejstvo je baza za *Church-Turingovo tezo*: obstaja le ena smiselna matematična definicija izračunljivosti.

Matematične probleme lahko razvrstimo glede na izračunljivost. Na primer, *odločljivi* problemi so tisti, za katere je mogoče izračunati odgovor, medtem ko so *neodločljivi* problemi tisti za katere ne obstaja algoritem, ki reši problem. Turingov znan *problem ustavljanja* je primer neodločljivega problema. Mnogi drugi znani matematični problemi so tudi v tem razredu.

Tradicionalna teorija izračunljivosti obravnava računalniške probleme z *diskretnimi podatki*. Pogledali bomo tudi pojem izračunljivosti z *zveznimi podatki* kot funkcijami, realnimi števili itd.

(1) Turingovi stroji, univerzalni Turingov stroj, izračunljivost in neodločljivost.
(2) Drugi modeli računanja in Church-Turingova teza.
(3) Razvrščanje množic in funkcij glede na njihove izračunljivosti.
(4) Turingovi stroji tipa 2 za računanje z zveznimi podatki.
(5) Izračunljive funkcije na realnih številih in drugih zveznih vrstah podatkov.

Literatura:

- N.J. Cutland. Computability: An Introduction to Recursive Function Theory. Cambridge University Press. 1980.
- M. Sipser. Introduction to the Theory of Computation. Cengage Learning. 3rd Edition, 2012.
- A.M. Turing. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. Proceedings of the London Mathematical Society 2 42:230–65, 1937.
- K. Weihrauch. Computable Analysis: An Introduction. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2000.

Pričakovano predznanje: Opravljen predmet Logika in množice iz 1. letnika ali ekvivalentno znanje.

Ocenjevanje: Pisni in ustni izpit.

Semester: Zimski.

Tedenske ure: 3/2

Jezik: Slovenski ali angleški

Bridž

Obštudijska dejavnost, 3 ECTS

Barbara Drinovec Drnovšek

Opis: Bridž je družabna igra za 4 igralce oziroma 2 para, ki se igra z 52 igralnimi kartami. Sestavljena je iz dveh delov: iz licitacije in odigravanja. Pri licitaciji skušamo čim bolj natančno napovedati, koliko vzetkov bova s partnerjem dobila in katera barva bo adut. Vidimo le svoje karte, s partnerjem se sporazumevamo preko napovedi. V drugem delu igre poskuša par, ki je zmagal v licitaciji, osvojiti vsaj toliko vzetkov, kot jih je napovedal. Nasprotni par se trudi, da bi to preprečil.

Pri igri se razvija logično mišljenje, sposobnost hitrega odločanja in prilagajanje odločitev na podlagi vedno novih informacij, pa tudi socialne spretnosti in partnerski odnos.

Pri predmetu bomo spoznali osnovna pravila minibridža in bridža. Naučili se bomo osnov licitacije. Informacije, ki jih pridobimo iz licitacije, bomo uporabili pri odigravanju. Spoznali bomo temeljne prvine odigravanja: impas, ekspas, blokiranje in deblokiranje, ohranitev komunikacije, onemogočanje komunikacije med nasprotniki. Posvetili se bomo atakiranju in uporabi dovoljenih načinov komunikacije med partnerjema pri igri v obrambi.

Odigrali bomo en turnir v minibridžu in dva v bridžu.

Pričakovano predznanje: Vpis na prvo oziroma drugo stopnjo študijskega programa Univerze v Ljubljani. Predznanje ni potrebno.

Ocenjevanje: Ocenjuje se z ocenama »opravil«/»ni opravil«. Za pristop k izpitu je pogoj 75-odstotna prisotnost pri predmetu. Z dvema uspešno odigranima turnirjema študent opravi izpit.

Semester: zimski, ob sredah ob 16.15.

Tedenske ure: 1/2
Eni uri predavanj bosta sledili dve uri vaj. Študenti se bodo pridobljeno teoretično znanje naučili uporabiti v praksi.

Jezik: slovenski

Ostalo: Študent lahko obštudijsko dejavnost izbere v okviru splošnih izbirnih predmetov. Vpis v obštudijsko dejavnost bo potekal od začetka vpisov na FMF do zapolnitve prostih mest.

Matematična tekmovanja

Vesna Iršič Chenoweth, Igor Klep

Vsebina in cilji predmeta

Pri predmetu se bomo seznanili s svetom tekmovalne matematike. Reševali bomo naloge z mednarodnih matematičnih tekmovanj za dijake (IMO, EGMO, RMMO) in študente (IMC, SMMC). Obravnavali bomo metode reševanja teh zahtevnejših problemov, vadili jasno in pregledno pisanje rešitev ter izvedli nekaj »poskusnih tekmovanj« v duhu pravih matematičnih tekmovanj. Med drugim bomo obravnavali naslednje teme, ki se pogosto pojavljajo na matematičnih tekmovanjih:

- algebraične metode in neenačbe,
- teorija števil in diofantske enačbe,
- kombinatorika in invariante,
- evklidska geometrija,
- analiza in funkcije ene realne spremenljivke,
- linearna algebra in matrične enačbe,
- verjetnost in slučajne spremenljivke.

Poseben poudarek bo na predstavitvi matematičnih vsebin svojim sovrstnikom, zato je predmet še posebej zanimiv za tiste, ki bi v prihodnosti radi delali z nadarjenimi dijaki. Hkrati pa je udeležba na predmetu dobra vaja za matematična tekmovanja in lahko pripomore k izboru v univerzitetno ekipo za mednarodna tekmovanja.

Literatura

- R. Gelca, T. Andreescu, *Putnam and Beyond*, Springer, 2007.
- A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.
- T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, 2009.
- I. Majcen, *Smelo na Olimp*, DMFA Slovenije, 2011.
- M. Željko, *Altius, citius, fortius: izbrana poglavja iz matematike za srednješolce*, DMFA Slovenije, 1997.

Povezanost z drugimi predmeti

Predmeta se lahko udeležijo študenti, ki so vpisani na prvo oziroma drugo stopnjo študijskega programa Univerze v Ljubljani. Zaželena sta veselje do reševanja matematičnih problemov in zanimanje za predstavljanje matematičnih vsebin. Priporočljivo je znanje analize, linearne algebre in verjetnosti s prve stopnje, ni pa pogoj za uspešno udeležbo pri predmetu.

Izpitni režim

Predmet se oceni z »opravil« oziroma »ni opravil«. Pogoj za uspešno opravljen predmet so predstavitev izbrane teme na seminarju, vsaj 50-odstotna udeležba na seminarjih drugih študentov in udeležba na vsaj enem poskusnem tekmovanju.

Semester: Zimski.
Tedenske ure: 3 ure na teden.
Jezik: Slovenski.

Prostovoljna učna pomoč
Obštudijska dejavnost, 3 ECTS
Damjan Kobal

Opis: Mladi iz socialno ogroženih družin so pogosto manj uspešni pri študijskem delu in potrebujejo učno pomoč, ki pa si je ne morejo privoščiti. Po drugi strani lahko za take otroke prav učni uspeh predstavlja motivacijo in edino upanje za izhod iz negativnih socialno-družinskih ciklov.

V sodelovanju z relevantnimi humanitarnimi organizacijami, kot so na primer *Zveza prijateljev mladine Ljubljana Moste-Polje*, *Mladinski dom Malči Beličeve* ali *Slovenska filantropija*, študent izvede približno 30 ur individualnih ali skupinskih inštrukcij ali drugega spremljevalnega dela mladih v okviru organiziranih aktivnosti ustreznih humanitarnih organizacij. O vsebini in obsegu dela študent študent vodi preprost dnevnik in ob zaključku odda enostavno poročilo.

Pričakovano predznanje: Študentje vpisani na prvo oziroma drugo stopnjo študijskih programov Univerze v Ljubljani imajo za pričakovano delo dovolj predznanja.

Ocenjevanje: Ocena »opravil«/»ni opravil« se podeli na podlagi ustrezne angažiranosti.

Semester: zimski ali poletni

Tedenske ure: po dogovoru

Jezik: slovenski

Ostalo: Študent lahko obštudijsko dejavnost izbere v okviru splošnih izbirnih predmetov. Vpis v obštudijsko dejavnost bo potekal od začetka vpisov na FMF do zapolnitve prostih mest.

Moderna fizika

Sašo Grozdanov

Opis: 'Moderna fizika' obravnava glavne teoretične koncepte in z njimi povezane matematične strukture, ki so bili odkriti v fiziki 20. stoletja. Predmet je razdeljen na tri dele, pri katerih se bomo ukvarjali z naslednjimi temami:

Elektromagnetno polje:

- Električno in magnetno polje;
- Maxwellove enačbe;
- Elektromagnetno valovanje;
- Magnetni monopoli;

Teorija relativnosti:

- Posebna teorija relativnosti: prostor-čas, Lorentzove transformacije, metrika Minkowskega in Poincaréjeva grupa;
- Elektromagnetizem in teorija relativnosti: Maxwellove enačbe v kovariantni obliki;
- Maxwellove enačbe v jeziku diferencialnih form;
- Osnove klasične teorije polja (Lagrangian in akcija);
- Elektromagnetizem kot umeritvena (gauge) teorija polja;
- Ukrivljen prostor-čas, geodetke in osnove Splošne teorije relativnosti;
- Kaj so črne luknje?;

Kvantna fizika:

- Zakaj potrebujemo kvantno fiziko?;
- Valovne lastnosti delcev, Schrödingerjeva enačba in probabilistična interpretacija;
- Postulati kvantne fizike, Heisenbergove relacije;
- Primeri kvantnih sistemov: harmonski oscilator, vodikov atom;
- Relativistična kvantna mehanika, Diracova enačba, spin in antimaterija;
- Osnove Feynmanovega popotnega integrala: zakaj je klasična fizika limita kvantne fizike?
- Kaj je kvantna teorija polja in kaj je standardni model teorije delcev?

Literatura: Zapiski s predavanj, ki bodo objavljeni na spletu. Pri različnih temah bodo priporočene različne, neobvezne knjige in zapiski.

Pričakovano predznanje: Od študentov pričakujemo predznanje fizike v obsegu ustreznega predmeta na 1. stopnji študija matematike.

Ocenjevanje: Znanje predelane snovi se bo ocenjevalo z obveznimi domačimi nalogami (skupno, približno 5-6 domačimi nalogami). Pisni izpit se lahko piše v razredu ali pa se nadomesti z dodatno domačo nalogo (odvisno od dogovora s študenti). Na koncu je potrebno opraviti še ustni del izpita.

Semester: zimski

Tedenske ure: 3/2

Jezik: angleški (ali slovenski; odvisno od dogovora s študenti)

Kategorna logika (Categorical Logic))

Alex Simpson

Opis: Predmet se bo ukvarjal z modeli teorije kategorij, ki so uporabne za matematiko in računalništvo. Predmet bo samostojen.

(1) Kartezično zaprte kategorije in tipiziran λ-račun.
(2) Primer: kategorije funktorjev.
(3) Primer: kategorije iz teroje realizabilnosti.
(4) Monadi in račun za učinke.
(5) Primer: kategorije algeber.
(6) Lokalno kartezično zaprte kategorije in teorija odvisnih tipov.
(7) Regularne kategorije in logika podobjektov.
(8) Kvazitoposi in toposi.
(9) Primer: kategorije snopov.
(10) Primer: realizabilnostni toposi.
(11) Fibracijie.

Literatura:

- S. Mac Lane and I. Moerdijk. Sheaves in Geometry and Logic. Springer-Verlag, 1992.
- B. Jacobs. Categorical Logic and Type Theory. North Holland, 1999
- S. Awodey. Categorical Logic. Lecture notes, 2024.

Pričakovano predznanje: Splošna matematična zrelost, kot se spodobi za doktorskega študenta.

Ocenjevanje: Udeležba na seminarju in ustni izpiti.

Semester: Zimskii.

Tedenske ure: 2/1 (predavanja: 2, seminar: 1)

Jezik: Angleški

Struktura in naključnost v teoriji grafov in aditivni kombinatoriki

Urban Jezernik

Opis: Doktorski predmet ponuja sodoben uvod v osrednjo temo sodobne kombinatorike: dihotomijo med strukturo in psevdonaključnostjo, ki se je vzporedno razvijala v teoriji grafov in aditivni kombinatoriki ter ju povezuje skupen nabor metod in pogledov. Tesno bomo sledili novemu učbeniku Yufeija Zhaa Graph Theory and Additive Combinatorics: Exploring Structure and Randomness, pri čemer si bomo prizadevali obravnavati večino njegove vsebine.

Na strani teorije grafov bomo razvili temeljne tehnike ekstremalne in verjetnostne kombinatorike, začenši s klasičnimi problemi prepovedanih podgrafov, na primer vprašanji Turánovega tipa, nato pa bomo prešli k strukturnim orodjem, kot so Szemerédijeva metoda regularnosti, ideje preštevanja in odstranjevanja ter modeli naključnosti prek kvazinaključnih grafov in spektralnih metod. Nato bomo obravnavali analitične okvire, ki urejajo obsežno strukturo grafov, med drugim limite grafov oziroma grafone ter neenakosti za gostote grafov in homomorfizmov, s poudarkom na tem, kako analitične neenakosti izražajo kombinatorične omejitve.

Na strani aditivne kombinatorike se bomo osredotočili na prelomne rezultate in ideje, ki stojijo za njimi, zlasti na izreke Rothovega tipa in 3-člena aritmetična zaporedja, Fourierjeve metode v končnih abelovih grupah in v celih številih ter širšo filozofijo regularnosti v aritmetičnih okoljih. Nato bomo preučevali strukturo vsotnih množic, na primer majhno podvojitev in strukturo Freimanovega tipa, ter fenomen vsote in produkta, preden bomo razpravljali o tem, kako se rezultati za goste množice prenesejo v redka psevdonaključna okolja, vrhunec pa bodo predstavljali ključni pojmi, povezani z izreki Szemerédija in Green–Tao. Ves čas bomo poudarjali, kako se ista konceptualna predloga (razcep objektov na strukturirane in psevdonaključne dele) pojavlja v različnih dokazih in uporabah ter kako se grafovska in aditivna perspektiva medsebojno krepita.

Predmet je zasnovan kot vstopna točka v širok nabor orodij (kombinatoričnih, spektralnih, analitičnih in Fourierjevih metod) ter kot priprava na branje sodobnih raziskovalnih del na presečišču ekstremalne kombinatorike in aditivne teorije števil.

Literatura:

- Zhao, Yufei. *Graph theory and additive combinatorics: exploring structure and randomness.* Cambridge University Press, 2023.

Pričakovano predznanje: /

Ocenjevanje: Bralna domača naloga, ustni izpit.

Semester: poletni

Tedenske ure: P/S=2/1

Jezik: angleški

Teorija razširitev simetričnih operatorjev in uporaba

Aleksey Kostenko

Opis: Glavni poudarek bo na teoriji razširitev simetričnih operatorjev v Hilbertovih prostorih in njenih uporabah pri linearnih diferencialnih operatorjih (Hamiltoniani s točkovnimi interakcijami, kvantni grafi in eliptične parcialne diferencialne enačbe). Prvi del predmeta bo posvečen klasičnemu pristopu, ki so ga razvili J. von Neumann, K. Friedrichs in M. G. Krein. Nato bomo obravnavali sodoben in zmogljiv pristop k teoriji samoadjungiranih razširitev, ki temelji na pojmu 'boundary triplets' za adjungirani operator simetričnega operatorja. Ta pristop, katerega začetniki so bili J. W. Calkin, M. Višik in M. Birman, se je izkazal za posebej uporabnega pri obravnavi diferencialnih operatorjev.

Literatura:

- M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert spaces*, D. Reidel Publ., Kluwer, 1987.
- V. Derkach and M. Malamud, *Extension Theory of Symmetric Operators and Boundary Value Problems*, Springer, 2025.
- K. Schmüdgen, *Unbounded Self–Adjoint Operators on Hilbert Space*, Springer, 2012.
- B. Simon, *A Comprehensive Course in Analysis, Part 4: Operator Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

Pričakovano predznanje: Osnovno znanje funkcionalne analize. Zaželeno je tudi osnovno poznavanje navadnih in parcialnih diferencialnih enačb, ni pa nujno.

Ocenjevanje: Pisni izpit.

Semester: zimski

Tedenske ure: (2 uri predavanj, 1 ura seminarja)

Jezik: angleki

Uporaba kohomologije v kompleksni analizi

Petar Pavešić, Marko Slapar

Opis: Predmet je uvod v kohomološke metode v kompleksni analizi. Uvodoma bomo predstavili osnovne kohomološke tehnike, vključno z vsebinami, ki bodo dopolnile predznanje poslušalcev. V drugem delu tečaja bomo predstavili nekaj bazičnih rezultatov kompleksne analize, ki jih lahko dobimo s pomočjo kohomoloških tehnik.
(1) Dobra pokritja, obstoj, kofinalnost, izrek o živcu. Kohomologija prirejena pokrtiju, direktne limite grup, eksaktnost, Čechova kohomologija, povezava z DeRhamovo kohomologijo, zlasti povezava med cup-produktom in produktom diferencialnih form. Opcija: osnove spektralnih zaporedij, spektralno zaporedje dvojnega kompleksa.
(2) Analitični snopi in Oka-in izrek o syzygy-jih, Cartanova Heftungslemma, lepljenje analitičnih snopov, koherentni analitični snopi Steinovih mnogoterosti, Cartanova izreka A in B, Dolbeaultova kohomologija, Cousinovi problemi in uporaba.

Literatura:

- R. Bott, L. Tu, Differential forms in Algebraic Topology, GTM 82 Springer, (1982).
- H. Grauert and R. Remmert, Theory of Stein spaces. Transl. from the German by Alan Huckleberry. Reprint of the 1979 ed. Berlin: Springer (2004).
- R. C. Gunning and H. Rossi: Analytic functions of several complex variables. Reprint of the 1965 original. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing (2009).

Pričakovano predznanje: Nekatere teme bodo zahtevale metode, ki so običajno obravnavane v standardnih tečajih algebraične topologije in kompleksne analize. Kadarkoli bo potrebno, bodo te teme na kratko predstavljene med tečajem

Ocenjevanje: Seminar in ustni izpit.

Semester: poletni

Tedenske ure: P/S/V=2/1/0

Jezik: slovenski ali angleški (odvisno od študentov pri predmetu).