Martin Raič:

O NAPAKI PRI NORMALNI APROKSIMACIJI TOČKASTIH VERJETNOSTI SIMETRIČNE BINOMSKE PORAZDELITVE

Že v 18. stoletju je Abraham de Moivre odkril asimptotično obnašanje binomskih koeficientov $\binom{n}{k}$, ko gre n proti neskončno, k pa je dovolj blizu $n/2$. Ekvivalentno, gre za asimptotično obnašanje točkastih verjetnosti simetrične binomske porazdelitve v njeni glavnini. Kasneje je Pierre Simon de Laplace to posplošil na primer, ko je k dovolj blizu np za fiksen $p \in (0,1)$, kar ustreza točkastim verjetnostim binomske porazdelitve $\mathrm{Bin}(n,p)$, spet v njeni glavnini. Rezultat je dobro znan kot *de Moivre–Laplaceova lokalna formula*:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \,.$$

Za $p \neq 1/2$ je absolutna napaka, ki jo naredimo pri tej aproksimaciji, reda velikosti $1/n$ (kar vsaj v glavnini pomeni relativno napako reda velikosti $1/\sqrt{n}$). Ta red velikosti je pravi. Za simetrični primer $p = 1/2$ pa gre bolje – napaka je reda velikosti $1/n^{3/2}$. V pričujočem prispevku izpeljemo optimalno konstanto, natančneje:

$$\sup_{\substack{n=1,2,3,\ldots\\ k=0,1,\ldots,n}} n^{3/2} \left| \binom{n}{k} \cdot 2^{-n} - \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\, e^{-\frac{(2k-n)^2}{2n}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \,.$$

To naredimo neposredno s pomočjo Stirlingove aproksimacije, natančneje asimptotične formule:

$$\ln n! \sim \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \cdots$$

Vrsta na desni je sicer divergentna, vendar pa se leva stran nahaja med poljubnima zaporednima delnima vsotama vrste. Za našo oceno bomo potrebovali delno vsoto iz zgoraj navedenih členov in predhodno delno vsoto. Stirlingova aproksimacija deluje za dovolj velike n, za preostale pa se rezultat zlahka preveri z računalnikom, na katerem teče intervalska aritmetika. Ena možnost je knjižnica FLINT.