Franc Forstnerič

Analiza na mnogoterostih

– Zapiski predavanj –

March 22, 2018

Vsebina

Poglavje 1
Gladke mnogoterosti

1.1 Uvod

Svet, ki nas obkroža, ni raven, ampak je trirazsežna mnogoterost. Če sledimo ideji fizikov in dodamo čas kot četrto spremenljivko, dobimo štiridimenzionalno mnogoterost prostor-čas. Že Einstein je spoznal, da je le-ta raven samo lokalno, globalno pa je ukrivljen; z njegovim študijem se ukvarja splošna teorija relativnosti. In zakaj bi se ustavili pri dimenziji 4? Lahko dodamo še dimenzije, ki opisujejo kvantna stanja delcev in dobimo 10-dimenzionalno mnogoterost.

Nekatera najzanimivejša vprašanja sodobne matematike in njenih uporab se dotikajo globalnih lastnosti mnogoterosti. Teorija mnogoterosti je ena najbolj interdisciplinarnih področij sodobne matematike.

Matematično povedano: Gladka mnogoterost dimenzije n je Hausdorffov topološki prostor, ki izgleda lokalno v okolici vsake točke tako kot n-dimenzionalni evklidski prostor, ti kosi pa so zlepljeni skupaj z gladkimi difeomorfizmi. Najpreprostejši primeri so krivulje in ploskve v evklidskem prostoru. Pojem mnogoterosti se je naravno razvil iz del slavnih matematikov in fizikov kot so bili Gauss, Riemann, Klein, Poincaré, Einstein, Cartan, Chern in mnogi drugi. Analitične pojme in sredstva kot so odvajanje, integriranje, diferencialne enačbe, vektorska polja, diferencialne forme, Riemannova in Hermitska metrika... lahko naravno posplošimo na gladke mnogoterosti. Opremljene s temi analitičnimi sredstvi so mnogoterosti osnova za vrsto področij sodobne matematike kot so diferencialna, analitična in algebraična geometrija, diferencialna topologija, teorija Liejevih grup, dinamika, teorija foliacij, itd. Mnogoterosti so tudi ter nepogrešljivo orodje v fiziki, mehaniki, astronomiji in drugih področjih naravoslovja in tehnike.

Knjiga je uvod v teorijo gladkih mnogoterosti. Predpostavlja se poznavanje osnov matematične analize in topologije v obsegu predmetov na študijskem programu 1.stopnje Matematika na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.

Več o teoriji mnogoterosti lahko bralec najde v vrsti virov, ki so navedeni v bibliografiji [1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11].

1.2 Topološke mnogoterosti

1.2.1 Mnogoterosti brez roba, osnovni primeri

Naj bo $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ nenegativno naravno število. Modelna n-dimenzionalna mnogoterost (brez roba) je evklidski prostor $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.1 *Naj bo $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$. Topološki prostor X je n-*razsežna topološka mnogoterost*, $n = \dim X$, če ima naslednje lastnosti.*

(a) *X je Hausdorffov (T_2 prostor).*
(b) *X je* lokalno evklidski *dimenzije n: za vsako točko $p \in X$ obstaja odprta okolica $U \subset X$ in homeomorfizem $\phi\colon U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ na neko odprto množico v $\mathbb{R}^n$.*
(c) *X je 2-števen, to je, obstaja števna baza topologije.*

Iz definicije sledi, da je 0-razsežna mnogoterost končna ali števna množica z diskretno topologijo. Dimenzija mnogoterosti je enolično določena, kar sledi iz naslednjega izreka o invarianci odprtih množic.

Izrek 1.2 (Brouwer 1911) *Če je neprazna odprta množica $U \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfna neki podmnožici $V \subset \mathbb{R}^k$, potem je $k = n$ in je V tudi odprta v $\mathbb{R}^n$.*

Vsak homeomorfizem $\phi\colon U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ kot v točki (b) se imenuje *lokalna karta* na X, inverzna preslikava $\phi^{-1}\colon U' = \phi(U) \to U$ pa je *lokalna parametrizacija* podmnožice $U \subset X$. Družina $\mathscr{U} = \{(U_j, \phi_j)\colon j \in \mathscr{J}\}$ lokalnih kart na topološki mnogoterosti X, za katero velja $\bigcup_{j\in\mathscr{J}} U_j = X$, se imenuje *topološki atlas* na X. Ogledali si bomo nekaj osnovnih primerov mnogoterosti.

Primer 1.3 Modelna n-dimenzionalna mnogoterost je evklidski prostor $\mathbb{R}^n$. Vsaka odprta podmnožica $X \subset \mathbb{R}^n$ je mnogoterost; inkluzija $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ je lokalna (in tudi globalna) karta na X.

Primer 1.4 *Sfera dimenzije $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{S}^n = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=0}^{n} x_j^2 = 1 \right\}. \tag{1.1}$$

Za vsak $j \in \{0,1,\dots,n\}$ označimo z $U_j^{\pm}$ naslednji hemisferi:

$$U_j^+ = \{x \in \mathbb{S}^n : x_j > 0\}, \qquad U_j^- = \{x \in \mathbb{S}^n : x_j < 0\}.$$

Označimo s $\pi_j\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ koordinatno projekcijo vzdolž smeri x_j:

$$\pi_j(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

(Strešica na x_j pomeni, da smo to spremenljivko izpustili.) Zožitev projekcije π_j na množici $U_j^\pm$ podaja lokalni karti

$$\phi_j^\pm = \pi_j|_{U_j\pm} \colon U_j^\pm \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Očitno je $\phi_j^\pm(U_j^\pm)$ enotna krogla

$$\mathbb{B}(0;1) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |y|^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2 < 1 \right\}.$$

Inverz zgornjih preslikav $(\phi_j^\pm)^{-1} \colon \mathbb{B}(0;1) \to U_j^\pm$ je enak

$$(y_1,\dots,y_n) \quad \longmapsto \quad \left(y_1,\dots,y_j, \pm\sqrt{1-\|y\|^2}, y_{j+1},\dots,y_n \right).$$

Ker je unija teh kart enaka $\bigcup_{j=0}^n U_j^\pm = \mathbb{S}^n$, je tako dobljena družina atlas na $\mathbb{S}^n$.

Primer 1.5 *Sfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ s stereografsko projekcijo.* Naj bodo $(x_1,\dots,x_n,u)$ koordinate na $\mathbb{R}^{n+1}$. Označimo z $N = (0,\dots,0,1)$ in $S = (0,\dots,0,-1)$ severni in južni pol sfere. Stereografska projekcija iz N oziroma S na hiperravnino $\{u=0\} \cong \mathbb{R}^n$ nam da karti

$$\phi \colon \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n, \qquad \psi \colon \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n,$$

podani z naslednjima formulama:

$$\phi(x_1,\dots,x_n,u) = \frac{1}{1-u}(x_1,\dots,x_n), \qquad \psi(x_1,\dots,x_n,u) = \frac{1}{1+u}(x_1,\dots,x_n).$$

Primer 1.6 (Riemannova sfera) Posebej si oglejmo 2-sfero $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3_{(x,y,u)}$. Ravnino $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ s koordinatama (x,y) identificirajmo s kompleksno ravnino

$$\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y : x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Lokalni karti na sferi $\mathbb{S}^2 = \{(z,u) : |z|^2 + u^2 = 1\}$ iz primera 1.5 sta

$$\phi(z,u) = \frac{z}{1-u}, \qquad \psi(z,u) = \frac{z}{1+u}.$$

Odtod sledi $\overline{\psi}(z,u) = \bar{z}/(1+u)$ in

$$\overline{\psi}(z,u)\phi(z,u) = \frac{z\bar{z}}{1-u^2} = 1,$$

ker je $|z|^2 + u^2 = 1$. Prehodna preslikava med obema kartama je torej

$$\overline{\psi} \circ \phi^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\zeta}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Ker je prehodna preslikava biholomorfna, karti $(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \phi)$, $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \overline{\psi})$ definirata *kompleksni atlas* na $\mathbb{S}^2$ (glej razdelek 1.3.5). Sfera $\mathbb{S}^2$, opremljena s tem kompleksnim atlasom, se imenuje *Riemannova sfera*.

Primer 1.7 (Hiperploskve v evklidskem prostoru) Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $f : D \to \mathbb{R}$ gladka funkcija. Množica

$$X_c = \{x \in D : f(x) = c\} = f^{-1}(c)$$

se imenuje *nivojnica* funkcije f. Primer nivojnic so sfere:

$$\mathbb{S}^n_r = \left\{ x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=0}^{n} x_j^2 = r^2 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Izrek o implicitni funciji (glej razdelek 1.7) pove, da je nivojnica X_c podmnogoterost kodimenzije 1 (hiperploskev), če je število c regularna vrednost f, to je, X_c ne vsebuje nobene kritične točke f. Po Sardovem izreku to velja za skoraj vsako število; natančneje, množica kritičnih vrednosti gladke funkcije ima mero nič.

1.2.2 Mnogoterosti z robom

Sedaj bomo uvedli še pojem mnogoterosti z robom. Modelni prostor je v tem primeru zaprta zgornja polravnina:

$$\mathbb{H}^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0 \right\}.$$

Njen *rob* je hiperravnina

$$\partial \mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H} : x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}.$$

Definicija 1.8 *Topološki prostor X je* topološka n-dimenzionalna mnogoterost z robom*, če je X Hausdorffov,* 2*-števen in ima vsaka točka $p \in X$ odprto okolico $U \subset X$ in homeomorfizem $\phi : U \to U'$ na neko odprto množico $U' \subset \mathbb{H}^n$.*

Točke $p \in X$ mnogoterosti z robom klasificiramo na *notranje* in *robne* točke. Naj bo $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ lokalna karta na X v neki okolici p. Imamo naslednji dve možnosti:

1. primer: $\phi(p) \in \mathring{\mathbb{H}}^n = \{x \in \mathbb{H}^n : x_n > 0\}$. Če okolico U točke p primerno zmanjšamo, velja $\phi(U) \subset \mathring{\mathbb{H}}^n$, zato je $\phi(U)$ odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$. Taki točki $p \in X$ pravimo *notranja točka* mnogoterosti X.

2. primer: $\phi(p) \in \partial \mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H} : x_n = 0\}$. Taki točki pravimo *robna točka* mnogoterosti X.

Klasifikacija točk na notranje in robne je neodvisna od izbora lokalne karte, kar sledi iz Brouwerjevega izreka (glej izrek 1.2). Če je θ difeomorfizem, je to očitna posledica izreka o inverzni preslikavi.

Oglejmo si prehodno preslikavo med dvema kartama na mnogoterosti z robom X:

$$\theta = \phi^{-1} \circ \psi : V' \xrightarrow{\cong} U'.$$

Iz Brouwerjevega izreka sledi, da θ preslika $V' \cap \mathring{\mathbb{H}}^n$ na $U' \cap \mathring{\mathbb{H}}^n$ ter $V' \cap \partial\mathbb{H}^n$ na $U' \cap \partial\mathbb{H}^n$. Torej je vsaka točka $p \in X$, ki je notranja glede na neko lokalno karto, notranja glede na poljubno lokalno karto. Analogen sklep velja za robne točke.

Množico vseh notranjih točk mnogoterosti X označimo z $\mathring{X}$ in jo imenujemo *notranjost*, množico vseh njenih robnih točk pa z ∂X in jo imenujemo *rob mnogoterosti* X. V mnogih virih se rob mnogoterosti označuje tudi z bX.

Naj bo $p \in \partial X$ robna točka in (U, ϕ) lokalna karta. Njena zožitev

$$\phi|_{U \cap \partial X} : U \cap \partial X \longrightarrow U' \cap \partial\mathbb{H}^n$$

je lokalna karta na ∂X z vrednostmi v $\partial\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Odtod sledi

Posledica 1.9 *Če je X topološka mnogoterost dimenzije n z robom, potem je njen rob ∂X topološka mnogoterost brez roba dimenzije $n-1$.*

Primer 1.10 Naj bo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gladka funkcija in $c \in \mathbb{R}$ neka njena *regularna vrednost*. To pomeni, da je diferencial $df_x \neq 0$ neizrojen v poljubni točki x na nivojnici $f(x) = c$. Tedaj je množica

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$$

n-dimenzionalna mnogoterost z robom $\partial X = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$. (Glej izrek o implicitni funkciji, razdelek 1.7.)

1.2.3 Topološke lastnosti mnogoterosti

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj bistvenih topoloških lastnosti mnogoterosti.

Izrek 1.11 *Vsaka topološka mnogoterost je:*

(a) lokalno povezana s potmi *(vsaka točka ima bazo s potmi povezanih okolic);*
(b) lokalno kompaktna *(vsaka točka ima kompaktno okolico);*
(c) števno kompaktna *(unija števne družine kompaktnih množic);*
(d) normalen *in T_4 topološki prostor;*
(e) metrizabilna *(obstaja metrika na X, ki inducira topologijo na X);*
(f) parakompaktna.

Dokaz Lastnosti (a) in (b) sta očitni posledici definicije.

Lastnost (c) sledi iz (b) ter 2-števnosti, saj ima X števno bazo odprtih množic $\{V_i : i \in \mathscr{I}\}$, tako da je $\overline{V}_i$ kompakt. Množice $K_j = \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_j$ sestavljajo naraščajoče zaporedje kompaktov, ki izčrpajo X:

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = X.$$

S prehodom na podzaporedje lahko dosežemo, da velja $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ za vsak $j = 1, 2, \ldots$; takemu zaporedju pravimo *normalno izčrpanje* mnogoterosti X.

Lastnost (d) sledi iz dejstva, da je vsak lokalno kompakten in števno kompakten T_1 prostor *normalen*, to je, vsak par disjunktnih zaprtih podmnožic v X lahko ločimo s parom odprtih okolic. (Po Urysohnova lemi lahko vsak tak par ločimo tudi z zvezno funkcijo.) Prostor je T_4, če je Hausdorffov in normalen.

Lastnost (e) sledi iz (d) in naslednjega *Urysohnovega metrizacijskega izreka* (glej Kelley, General Topology, str. 125).

Izrek 1.12 *Vsak regularen (torej tudi vsak normalen) 2-števen Hausdorffov topološki prostor je homeomorfen podprostoru v Hilbertovi kocki $H = [0,1]^\infty$ (t.j. kartezični produkt števne družine kopij intervala $[0,1] \subset \mathbb{R}$).*

Funkcija $d \colon H \times H \to \mathbb{R}_+$, definirana s predpisom

$$d\big((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)\big) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |x_j - y_j|,$$

je metrika na $H = [0,1]^\infty$. Njena zožitev na podmnožico X je metrika na X.

Topološki prostor X se imenuje *parakompakten*, če za vsako odprto pokritje $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ obstaja neko finejše (včrtano) lokalno končno pokritje $\mathscr{V} = \{V_\beta\}$. To pomeni:

- $\forall \beta \; \exists \alpha = \alpha(\beta)$, da je $V_\beta \subseteq U_\alpha$, in
- vsaka točka $p \in X$ ima okolico $U \subset X$, za katero je presek $U \cap V_\beta$ neprazen za največ končno različnih indeksov β.

Za dokaz implikacije (e) $\Rightarrow$ (f) glej npr. Kelley, General Topology, str. 160. Več o separacijskih lastnostih lahko bralec najde tudi na

`https://en.wikipedia.org/wiki/Separation_axiom`

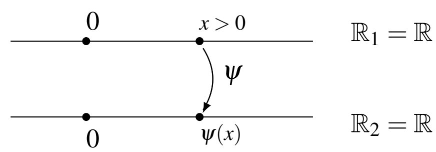
Opomba 1.13 *Za lokalno evklidske Hausdorffove topološke prostore so naslednje lastnosti med seboj ekvivalentne:*

- 2-*števnost,*
- *števna kompaktnost,*
- *metrizabilnost,*
- *parakompaktnost.*

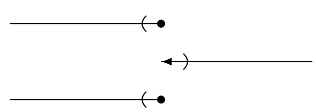
1.2.4 Posplošitve pojma mnogoterosti

Ne-Hausdorffove mnogoterosti. Če iz definicije mnogoterosti izpustimo Hausdorffovo lastnost, dobimo t.i. *ne-Hausdorffovo mnogoterost*; to je topološki prostor, ki je lokalno evklidski in 2-števen. Primeri se naravno pojavijo v teoriji foliacij in drugih področjih.

Oglejmo si preprost primer. Naj bo $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ neka zvezna strogo naraščajoča funkcija, $\psi(0) = 0$. Lahko vzamemo na primer $\psi(t) = t$.



Definiramo ekvivalenčno relacijo z naslednjim predpisom: če je $x \in \mathbb{R}_1$ in $y \in \mathbb{R}_2$, potem je $x \sim y$ natanko tedaj, ko je $x > 0$ in $y = \psi(x) > 0$. Kvocientni prostor $X/\sim$ je ne-Hausdorffova mnogoterost, ki jo ponazarja naslednja slika. Različni točki nad 0 nimata disjunktnih okolic.



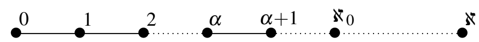
Primere ne-Hausdorffovih mnogoterosti najdemo tudi v prostorih zarodkov zveznih funkcij. Naj bo X topološka mnogoterost. *Zarodek funkcije* v točki $x \in X$ je določen s parom (U, f), kjer je $U \subset X$ odprta množica, ki vsebuje točko x in je $f\colon U \to \mathbb{R}$ funkcija. Dva para (U, f) in (V, g) sta ekvivalentna (oziroma določata isti zarodek) v točki x natanko tedaj, ko obstaja okolica $x \in W \subset U \cap V$, tako da je $f|_W = g|_W$. Zarodek funkcije f v točki x označimo $[f]_x$.

Oglejmo si naslednji par gladkih funkcij na $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \mathrm{e}^{-1/x}, & x > 0. \end{cases}$$
$$g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Očitno velja $[f]_x = [g]_x$ natanko tedaj, ko je $x < 0$. Množica vseh zarodkov $\{[f]_x, [g]_x : x \in \mathbb{R}\}$ je ne-Hausdorffova 1-dimenzionalna mnogoterost.

Ne-parakompaktne mnogoterosti. Iz definicije mnogoterosti bi lahko izpustili tudi aksiom 2-števnosti. Primer take mnogoterosti je *dolga premica*, ki jo dobimo takole. Vzamemo vsa ordinalna števila do števila $\aleph$ (slednji predstavlja množico vseh realnih števil $\mathbb{R}$). Za vsako ordinalno število α obstaja njegov naslednik $\alpha+1$. Med njima je interval $[\alpha, \alpha+1]$, homeomorfen intervalu $[0,1]$.



Unija vseh intervalov $[\alpha, \alpha+1]$ je enodimenzionalna mnogoterost, ki ni 2-števna.

1.3 Gladke in kompleksne mnogoterosti

V tem razdelku bomo uvedli pojem gladkih, realno analitičnih in kompleksnih mnogoterosti. Najprej si oglejmo ustrezne razrede funkcij in preslikav.

1.3.1 Gladke in holomorfne funkcije

Naj bo D neka odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Za vsako število $r \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ označimo s $\mathscr{C}^k(D)$ prostor vseh k-krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij na D; $\mathscr{C}al^0(D) = \mathscr{C}(D)$ je prostor vseh zveznih funkcij na D. Očitno velja

$$\mathscr{C}^0(D) \supset \mathscr{C}^1(D) \supset \mathscr{C}^2(D) \supset \ldots \supset \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathscr{C}^r(D) = \mathscr{C}^\infty(D),$$

pri čemer so vse inkluzije stroge.

Funkcija f na D je *realno analitična*, če ima vsaka točka $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ okolico $U \subset \mathbb{R}^n$, na kateri je f predstavljena z vsoto neke konvergentne potenčne vrste:

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1,\dots,k_n}(x_1-a_1)^{k_1}\cdots(x_n-a_n)^{k_n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} c_k(x-a)^k.$$

Seveda je to ravno Taylorjeva vrsta funkcije f v točki a.

$\mathscr{C}^\omega(D)$ označuje prostor vseh realno analitičnih funkcij. Velja $\mathscr{C}^\omega(D) \subsetneq \mathscr{C}^\infty(D)$.

Vsi navedeni prostori so neskončno razsežni realni vektorski prostori (vsota funkcij ter produkt s skalarjem) ter algebre (produkt funkcij).

Ponovimo še pojem *holomorfne funkcije*. Modelna n-dimenzionalna kompleksna mnogoterost je kompleksni evklidski prostor $\mathbb{C}^n$, to je kartezični produkt n kopij kompleksne ravnine $\mathbb{C}$. Naj bodo $z = (z_1,\dots,z_n)$ kompleksne koordinate na $\mathbb{C}^n$, $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Za vsako diferenciabilno kompleksno funkcijo $f = u + \mathrm{i}v \colon D \to \mathbb{C}$ na neki domeni $D \subset \mathbb{C}^n$ je diferencial v poljubni točki $a \in D$,

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)\, dy_j,$$

realno linearna preslikava $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Razcepimo jo na vsoto $\mathbb{C}$-linearnega dela ∂f in $\mathbb{C}$-antilinearnega dela $\overline{\partial} f$:

$$df = \partial f + \overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j. \tag{1.2}$$

Pri tem je $dz_j = dx_j + \mathrm{i}\, dy_j$, $d\bar{z}_j = dx_j - \mathrm{i} dy_j$ in

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right). \tag{1.3}$$

Definicija 1.14 *Diferenciabilna funkcija $f\colon D \to \mathbb{C}$ na domeni $D \subset \mathbb{C}^n$ je* holomorfna*, če zadošča naslednjim ekvivalentnim lastnostim v poljubni točki $a \in D$:*

- *diferencial $df_a\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ je $\mathbb{C}$-linearna preslikava.*
- *$df = \partial f$.*
- *$\overline{\partial} f = 0$.*

V primeru $n = 1$ je diferencial df_a kompleksno linearen natanko tedaj, ko je f *kompleksno odvedljiva* v točki a, to je, ko obstaja njen kompleksni odvod

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Diferencial je tedaj enak $df_a(h) = f'(a)h$, $h \in \mathbb{C}$. Pišemo $df_a = f'(a)\, dz$, kjer je $dz = dx + \mathrm{i} dy$.

V splošnem je funkcija $f(z_1, \ldots, z_n)$ holomorfna natanko tedaj, ko velja

$$\overline{\partial} f = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Desna enakost ravno pomeni, da je f holomorfna kot funkcija vsake kompleksne spremenljivke z_j posebej. Takim funkcijam rečemo *separatno holomorfne*.

Pišimo $f = u + \mathrm{i} v$, kjer sta u in v realni funkciji. Enačba $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ je ekvivalentna Cauchy-Riemannovemu sistemu

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}. \tag{1.4}$$

Po izreku Hartogsa je funkcija $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ holomorfna natanko tedaj, ko je *separatno holomorfna* v smislu, da je za vsako točko $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ in za vsak $j = 1, \ldots, n$ funkcija

$$\mathbb{C} \ni \zeta \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + \zeta, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

holomorfna na množici $\{\zeta \in \mathbb{C} : (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + \zeta, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in D\}$. Netrivialno je videtiti, da je vsaka separatno holomorfna funkcija zvezna. Iz separatne holomorfnosti ter zveznosti dobimo s pomočjo večkratne uporabe običajne Cauchyjeve integralne formule naslednjo *Cauchyjevo integralno formulo* na vsakem polidisku

$$P(a,r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}, \quad r = (r_1, \ldots, r_n) \in (0, \infty)^n,$$

z zaprtjem $\overline{P(a,r)} \subset D$:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int_{|\zeta_1 - z_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_n - z_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}.$$

Z razvojem n-ternega Cauchyjevega jedra

$$C(z, \zeta) = \frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}$$

v geometrijsko vrsto okrog točke a in členisko integracijo dobimo razvoj holomorfne funkcije v konvergentno potenčno vrsto na poljubnem polidisku $P(a,r) \subset D$:

$$f(z) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} c_{k_1, \ldots, k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} c_k (z - a)^k.$$

Pomembno je, da zgornja vrsta ne vsebuje nobenih členov oblike $\overline{z_j - a_j}$.
Označimo z $\mathscr{O}(D)$ prostor vseh holomorfnih funkcij na D. Standardna oznaka $\mathscr{O}$ je po japonskem matematiku z imenom *Kiyoshi Oka*, enem od pionirjev kompleksne analize v več spremenljivkah.

1.3.2 Gladke mnogoterosti brez roba

Naj bo X topološka mnogoterost brez roba in $\mathscr{U} = \{(U_j, \phi_j) : j \in \mathscr{J}\}$ nek atlas na X. Pišimo $U_{ij} := U_i \cap U_j$.

Definicija 1.15 *Topološki atlas $\mathscr{U} = \{(U_j, \phi_j) : j \in \mathscr{J}\}$ na topološki mnogoterosti X se imenuje $\mathscr{C}^r$-atlas za nek $r \in \{1, \ldots, \infty, \omega\}$, če je za vsak par indeksov $i, j \in \mathscr{J}$ prehodna preslikava*

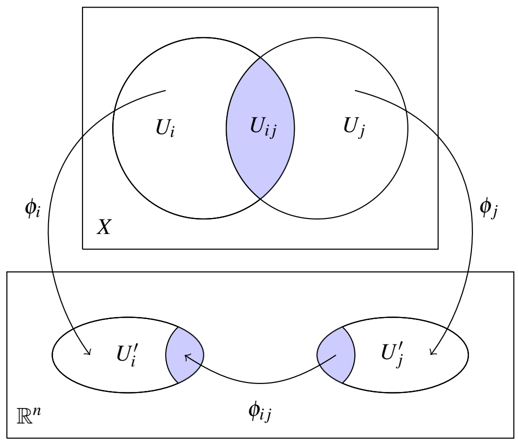
$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_{i,j}) \longrightarrow \phi_j(U_{i,j})$$

difeomorfizem razreda $\mathscr{C}^r$. (Tu smo označili $U_{i,j} = U_i \cap U_j$.)

Če velja pogoj v definiciji za dani part kart (U_i, ϕ_i), (U_j, ϕ_j), potem pravimo, da sta ti dve karti med seboj $\mathscr{C}^r$-kompatibilni. V primeru $U_{i,j} = \varnothing$ je pogoj na prazno izpolnjen. Družina prehodnih preslikav očitno zadošča naslednjim trem pogojem na ustreznih domenah:

- $\phi_{ii} = \mathrm{Id}$;
- $\phi_{ij} \circ \phi_{ji} = \mathrm{Id}$ (ekvivalentno, $\phi_{ij}^{-1} = \phi_{ji}$);
- $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} \circ \phi_{ki} = \mathrm{Id}$ (ekvivalentno, $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$).

Družina $\{\phi_{ij}\}$ s temi lastnostmi se imenuje *1-kocikel difeomorfizmov* na pokritju $\{U_j\}$.



Definicija 1.16 *$\mathscr{C}^r$ atlasa $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ ter $\mathscr{V} = \{(V_j, \psi_j)\}$ na topološki mnogoterosti X sta $\mathscr{C}^r$* ekvivalentna *(ali $\mathscr{C}^r$* kompatibilna*), če je njuna unija $\mathscr{U} \cup \mathscr{V}$ spet $\mathscr{C}^r$ atlas.*

Očitno sta atlasa $\mathscr{U}$ in $\mathscr{V}$ ekvivalentna natanko tedaj, ko je vsaka karta $(U_i, \phi_i) \in \mathscr{U}$ kompatibilna z vsako karto $(V_j, \psi_j) \in \mathscr{V}$. Ni težko videti, da je $\mathscr{C}^r$-ekvivalenca ekvivalenčna relacija na množici vseh $\mathscr{C}^r$ atlasov na dani mnogoterosti X.

Definicija 1.17 *Mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ je topološka mnogoterost X skupaj z izborom ekvivalenčnega razreda $\mathscr{C}^r$-atlasa.*

Ekvivalentno, $\mathscr{C}^r$ struktura na X je določena z izborom maksimalnega $\mathscr{C}^r$-atlasa na X, to je unija vseh $\mathscr{C}^r$ atlasov v nekem ekvivalenčnem razredu.

Naloga 1.18 Naj bo $\{(U,\phi),(V,\psi)\}$ atlas na n-sferi $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, definiran s stereografsko projekcijo. (Glej primer 1.5 na str. 3.) Pokaži, da ta atlas definira na $\mathbb{S}^n$ isto realno analitično strukturo kot atlas $\{(U_j^{\pm}, \phi_j^{\pm}), j = 0, \ldots, n\}$ iz primera 1.4 na str. 2.

1.3.3 Gladke mnogoterosti z robom

Definicijo 1.15 lahko uporabimo tudi za atlase na topoloških mnogoterostih z robom. Tako dobimo pojem $\mathscr{C}^r$ *mnogoterosti z robom*.

Prehodna preslikava $\phi_{\alpha\beta}$ med poljubnima kartama v danem $\mathscr{C}^r$ atlasu je difeomorfizem med odprtimi podmnožicami v $\mathbb{H}^n = \{y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n \colon y_n \geq 0\}$. Iz izreka o inverzni preslikavi sledi, da je difeomorfizem odprta preslikava, kar pomeni, da je slika odprte množice v $\mathbb{R}^n$ spet odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Torej preslika $\phi_{\alpha\beta}$ notranjost $\mathring{V} = V \cap \{y_n > 0\}$ v notranjost $\phi_{\alpha\beta}(V) \cap \{y_n > 0\}$ ter rob $V \cap \{y_n = 0\}$ v rob $\phi_{\alpha\beta}(V) \cap \{y_n = 0\}$.

Naj bo $\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ $\mathscr{C}^r$-atlas na mnogoterosti z robom $(X^n, \partial X)$. Družina vseh kart $(U_\alpha \cap \partial X, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial X})$, kjer je

$$\phi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial X} \colon \underbrace{U_\alpha \cap \partial X}_{\text{odprta v } \partial X} \longrightarrow \underbrace{\phi_\alpha(U_\alpha)}_{\subset \mathbb{H}^n} \cap \underbrace{\{y_n = 0\}}_{= \mathbb{R}^{n-1}}$$

je $\mathscr{C}^r$ atlas na ∂X, ki definira na ∂X strukturo $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti dimenzije $n-1$.

1.3.4 Orientabilne in neorientabilne mnogoterosti

Definicija 1.19 *Atlas* $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ *razreda* $\mathscr{C}^r$ $(r \geq 1)$ *na mnogoterosti* X *je* orientiran*, če vse prehodne preslikave* $\phi_{i,j} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ *ohranjajo orientacijo, to je, Jacobijeva determinanta* $\det(d\phi_{i,j}) > 0$ *je pozitivna v vsaki točki. Mnogoterost je* orientabilna*, če ima orientiran atlas; v nasprotnem primeru je* neorientabilna*.* Orientirana mnogoterost *je orientabilna mnogoterost skupaj z izborom orientiranega atlasa.*

Če je mnogoterost X povezana in orientabilna, potem ima natanko dve orientaciji. Če je $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ orientiran atlas na X, dobimo orientiran atlas $\mathscr{V} = \{(U_i, \psi_i)\}$ z nasprotno orientacijo npr. tako, da v vsaki karti $\phi_i = (\phi_{i,1}, \dots, \psi_{i,n})$ iz atlasa $\mathscr{U}$ spremenimo znak n-te komponente, torej vzamemo $\psi_i = (\phi_{i,1}, \dots, \psi_{i,n-1}, -\psi_{i,n})$. Prehodna preslikava med ϕ_i in ψ_i je tedaj $\phi_i \circ \psi_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ z Jacobijevko -1 v vsaki točki.

Najpreprostejša primera neorientabilne mnogoterosti sta Möbiusov trak in projektivna ravnina. Prvega dobimo npr. tako, da v kvadratu $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ identificiramo vsako točko $(-1, y)$ za $y \in [-1, +1]$ s točko $(+1, -y)$; to pomeni, da zlepimo levo stranico kvadrata z desno stranico v nasprotni smeti. Dobljeni trak ima samo eno stran in njegov rob je sklenjena krivulja (krožnica), sestavljena iz spodnje in zgornje stranice kvadrata, ki sta med seboj staknjeni v krajiščih. Drug osnovni primer je realna projektivna ravnina $\mathbb{RP}^2$, ki jo dobimo kot kvocientni prostor enotne 2-sphere $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ pri identifikaciji točke $x \in \mathbb{S}^2$ z njej antipodno točko $-x$. Podobno dobimo realni projektivni prostor $\mathbb{RP}^n$ dimenzije $n \in \mathbb{N}$ z identifikacijo antipodnih točk na sferi $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. (Za $n = 1$ je $\mathbb{RP}^1$ krožnica $\mathbb{S}^1$.) Izkaže se, da je $\mathbb{RP}^n$ orientabilen za lihe vrednosti n in je neorientabilen za sode vrednosti n. Tretji primer neorientabilne ploskve je *Kleinova steklenica* K, ki jo dobimo tako, da v kvadratu $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ zlepimo levo in desno stranico v nasprotni smeri (kot pri Möbiusovem traku), spodno in zgornjo stranico pa zlepimo v isti smeri, torej identificiramo $(x,-1)$ z $(x,+1)$ za vsak $x \in [-1,1]$.

1.3.5 Kompleksne mnogoterosti

Označimo koordinate na $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ z

$$\mathbb{R}^{2n} \ni (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \rightsquigarrow (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Kompleksna struktura na topološki mnogoterosti X^{2n} je podana z atlasom

$$\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha); \alpha \in \mathscr{I}\}, \quad \phi_\alpha : U_\alpha \to U'_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n,$$

tako da so vse prehodne preslikave $\phi_{\alpha\beta} : \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \to \phi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ biholomorfne (to je bijektivne, holomorfne in s holomorfnim inverzom).

Definicija 1.20 *Kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije n je topološka mnogoterost X realne dimenzije $2n$ skupaj z izborom kompleksne strukture (ekvivalentno, skupaj z izborom ekvivalenčnega razreda kompleksnih atlasov na X).*

Kompleksno dimenzijo označimo z $\dim_{\mathbb{C}} X$. Velja torej $\dim_{\mathbb{R}} X = 2\dim_{\mathbb{C}} X$.
Očitni primeri holomorfnih funkcij na podmnožici v $\mathbb{C}^n$ so polinomi v $z_1, \ldots, z_n$ (holomorfni polinomi) ter racionalne funkcije $\frac{P}{Q}$, kjer sta P, Q polinoma (slednja je holomorfna na množici $Q \neq 0$). Kompleksna mnogoterost z atlasom, ki ima za prehodne preslikave racionalne funkcije, se imenuje *kompleksno algebraična mnogoterost*.

Naloga 1.21 *Naj bo D domena v $\mathbb{C}^n$ in $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{C}^n$ holomorfna preslikava. Če identificiramo $\mathbb{C}^n$ z $\mathbb{R}^{2n}$ na standarden način, tako da kompleksni koordinati $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, priredimo realne koordinate $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ na $\mathbb{R}^{2n}$, lahko f identiciramo s preslikavo $F = (F_1, \ldots, F_{2n})$. Pokaži, da je*

$$\det F'(x) = |\det f'(x)|^2,$$

kjer je $F'(x)$ realna $2n \times 2n$ Jacobijeva matrika preslikave F v x in je $f'(x)$ kompleksna Jacobijeva matrika f v x. Odtod vidimo, da vsaka biholomorfna preslikava ohranja orientacijo, zato je vsaka kompleksna mnogoterost orientabilna.

1.4 Primeri in konstrukcije mnogoterosti

1.4.1 Riemannove ploskve

Kompleksne mnogoterosti kompleksne dimenzije 1 se imenujejo *Riemannove ploskve*. Najpreprostejši primeri so domene v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$.

Najpreprostejša kompaktna Riemannova ploskev je *Riemannova sfera* (glej primer 1.6 na str. 3). To je topološka 2-sfera $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (kompaktifikacija ravnine $\mathbb{C}$ z eno točko), opremljena s kompleksno strukturo, ki jo dobimo npr. s pomočjo stereografske projekcije enotne sfere v $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$ v primeru 1.6.

Riemann-Koebejev upodobitveni izrek pove, da je vsaka povezana in enostavno povezana Riemannova ploskev biholomorfno ekvivalentna eni od ploskev $\mathbb{S}^2$ (Riemannova sfera), $\mathbb{C}$, ali $\Delta = \{|z| < 1\}$. (Glej Izrek 1.94 na str. 47.) Vsaka Riemannova ploskev je holomorfen kvocient ene od zgornjih ploskev. Več o tem v razdelku 1.9.

1.4.2 Kartezični produkt mnogoterosti

Če sta X^n in Y^m mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$, ima kartezični produkt $X \times Y$ naravno strukturo $\mathscr{C}^r$ mnogoterost dimenzije $n+m$. Izberimo $\mathscr{C}^r$ atlas $\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ na X in $\mathscr{C}^r$ atlas $\mathscr{V} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ na Y. *Produktni atlas* na $X \times Y$ je $\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}$, kjer je preslikava

$$\phi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

definirana s predpisom

$$(\phi_\alpha \times \psi_\beta)(x,y) = (\phi_\alpha(x), \psi_\beta(y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}.$$

Očitno je $\phi_\alpha \times \psi_\beta$ homeomorfizem na svojo sliko. Prehodne preslikave so oblike

$$(u,v) \mapsto (\phi_{\alpha\alpha'}(u), \psi_{\beta\beta'}(v)),$$

torej so $\mathscr{C}^r$ difeomorfizmi. Kartezični produkt $X \times Y$ dveh $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti, opremljen s produktnim atlasom, je torej $\mathscr{C}^r$ mnogoterost.

Enako vidimo, da je produkt $X \times Y$ dveh kompleksnih mnogoterosti spet kompleksna mnogoterost in velja $\dim_{\mathbb{C}} X \times Y = \dim_{\mathbb{C}} X + \dim_{\mathbb{C}} Y$.

Primer 1.22 Produkt n kopij krožnice je n-dimenzionalni torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$.

1.4.3 Kvocientne mnogoterosti

Za motivacijo si ponovno oglejmo krožnico $\mathbb{S}^1$. Ta je izomorfna kvocientnemu prostoru $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ množice realnih števil po podgrupi vseh celih števil. Če si $\mathbb{S}^1$ predstavljamo kot množico vseh kompleksnih števil z normo ena, lahko kvocientno projekcijo $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ podamo z naslednjo preslikavo:

$$\pi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}, \qquad \pi(t) = e^{2\pi i t}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Naj bo X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Množica $X/{\sim}$, katere elementi so ekvivalenčni razredi relacije $\sim$, se imenuje *kvocientni prostor* prostora X glede na $\sim$.

Označimo s $\pi\colon X \to X/{\sim}$ kvocientno projekcijo, ki elementu $x \in X$ priredi njegov ekvivalenčni razred $[x] = \{y \in X\colon x \sim y\} \in X/{\sim}$. Topologijo na $X/{\sim}$ definiramo z zahtevo, da je množica $U \subset X/{\sim}$ odprta natanko tedaj, ko je njena praslika $\pi^{-1}(U) \subset X$ odprta. To je najmočnejša topologija na $X/{\sim}$, v kateri je projekcija π zvezna preslikava.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] & \supset & \pi^{-1}(U) \arrow[d, "\pi"'] \\ X/{\sim} & \supset & U \end{tikzcd}$$

Naslednji dve trditvi sta očitni posledici definicij.

Trditev 1.23 *Kvocientna projekcija π je odprta preslikava natanko tedaj, ko je $\sim$* odprta relacija *v naslednjem smislu: za vsako odprto množico $V \subset X$ je množica $\pi^{-1}(\pi(V)) = \{x \in X : x \sim y \text{ za nek } y \in V\}$ odprta.*

Trditev 1.24 *Naj bo $\sim$ odprta ekvivalenčna relacija na Hausdorffovem topološkem prostoru X. Kvocientni prostor $X/{\sim}$ je Hausdorffov natanko tedaj, ko je graf relacije*

$$\mathscr{R} = \{(x,y) \in X \times X\colon x \sim y\}$$

zaprta množica v $X \times X$. Taka relacija se imenuje zaprta.

V nadaljevanju nas bodo zanimale ekvivalenčne relacije $\sim$ na mnogoterosti X, ki so hkrati odprte in zaprte. Torej je kvocientna projekcija $\pi\colon X \to X/{\sim}$ odprta preslikava ter je $X/{\sim}$ Hausdorffov 2-števen topološki prostor. Zanimali nas bodo primeri, ko je $X/{\sim}$ spet mnogoterost. Najprej si oglejmo nekaj primerov.

1.4.4 Projektivni prostori

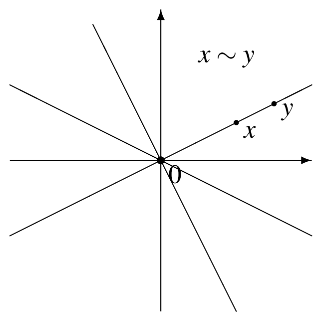
Za poljuben končno razsežen realen ali kompleksen vektorski prostor V dimenzije >1 definiramo projektivizacijo $\mathbb{P}(V)$ kot množico vseh enodimenzionalnih vektorskih podprostorov v V. Konkretno je V izomorfen enemu od prostorov $\mathbb{R}^{n+1}$ oz. $\mathbb{C}^{n+1}$ in

$$\begin{aligned}
\mathbb{RP}^n &= \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \text{množica vseh realnih premic skozi 0 v } \mathbb{R}^{n+1},\\
\mathbb{CP}^n &= \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \text{množica vseh kompleksnih premic skozi 0 v } \mathbb{C}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Na $\mathbb{R}^{n+1}_* = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiramo ekvivalenčno relacijo s predpisom

$$x \sim y \iff y = tx \ \text{ za nek } t \in \mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Torej je $x \sim y$ natanko tedaj, da sta vektorja x in y kolinearna.



Očitno je $\sim$ ekvivalenčna relacija in kvocientni prostor je realni projektivni prostor $\mathbb{RP}^n$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1}_* \arrow[d, "\pi"'] & \\
\mathbb{RP}^n & = \quad \mathbb{R}^{n+1}_*/\sim
\end{tikzcd}$$

Za vsak vektor $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_*$ označimo njegovo sliko z

$$\pi(x) = [x_0 : x_1 : \ \ldots : x_n] \in \mathbb{RP}^n.$$

Po definicije relacije $\sim$ velja

$$[x_0 : x_1 : \ \ldots : x_n] = [y_0 : y_1 : \ \ldots : y_n] \iff \exists\, t \in \mathbb{R}_* \ni : y_j = tx_j \ \ \forall j = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

To so t.i. *homogene koordinate* na $\mathbb{RP}^n$. Podobno definiramo kompleksne homogene koordinate $[z_0 : z_1 : \ \ldots : z_n]$ na $\mathbb{CP}^n$.

Trditev 1.25 *Kvocientna projekcija $\pi \colon \mathbb{R}^{n+1}_* \to \mathbb{RP}^n$ je odprta in prostor $\mathbb{RP}^n$ je kompakten Hausdorffov. Isto velja za projekcijo $\pi \colon \mathbb{C}^{n+1}_* \to \mathbb{CP}^n$.*

Dokaz Naj bo U odprta množica v $\mathbb{R}^{n+1}_*$. Potem je množica

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}_*} tU \quad \text{(stožec nad } U\text{)}$$

odprta. Iz trditve 1.23 sledi, da je projekcija $\pi : \mathbb{R}^{n+1}_* \to \mathbb{RP}^n$ odprta preslikava.
Graf relacije $\sim$ je množica

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_* \times \mathbb{R}^{n+1}_* : \sum_{j,k=0,\dots,n} (x_j y_k - x_k y_j)^2 = 0\right\},$$

ki je zaprta, saj je ničelna množica zvezne funkcije. Torej je projektivni prostor $\mathbb{RP}^n$ Hausdorffov po trditvi 1.24.
Naj bo $\mathbb{S}^n$ enotna sfera v $\mathbb{R}^{n+1}$. Potem je $\mathbb{RP}^n = \pi(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n/_{x\sim -x}$, torej je $\mathbb{RP}^n$ kompakten.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_2 \arrow[r, hook] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\pi"', "\text{2-listna projekcija}"] \\ & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}.$$

Analogni zaključki veljajo za kompleksni projektivni prostor $\mathbb{CP}^n$. Naj bo $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ enotna sfera v $\mathbb{C}^{n+1}$. Vsaka kompleksna premica $\mathbb{C}v = \{tv : t \in \mathbb{C}\}$ skozi poljuben enotni vektor $v \in \mathbb{S}^{2n+1}$ seka sfero $\mathbb{S}^{2n+1}$ v krožnici

$$\mathbb{C}v \cap \mathbb{S}^{2n+1} = \left\{e^{\mathrm{i}t}v : t \in \mathbb{R}\right\} \cong \mathbb{S}^1.$$

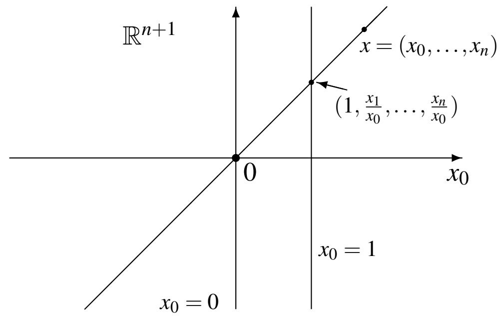
Zožitev projekcije $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1}_* \to \mathbb{CP}^n$ na sfero nam da t.i. *Hopfovo fibracijo* $\pi\colon \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$, ki je realno-analitičen sveženj z vlaknom $\mathbb{S}^1$ (angl. *circle bundle*):

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, hook] & \mathbb{S}^{2n+1} \arrow[d] \\ & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

S tem je trditev 1.25 dokazana. □

Sedaj bomo opisali konstrukcijo realno analitičnega atlasa na $\mathbb{RP}^n$ ter kompleksnega atlasa na $\mathbb{CP}^n$. Za vsak $j = 0, 1, \dots, n$ definiramo

$$U_j = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_* \colon x_j \neq 0\}, \quad V_j = \pi(U_j) \subset \mathbb{RP}^n.$$



Definiramo preslikavo $\phi_j\colon V_j \to \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$\phi_j([x]) = \phi_j([x_0\colon x_1\colon \dots \colon x_n]) \stackrel{def}{=} \left(\frac{x_0}{x_j},\dots,\frac{x_{j-1}}{x_j},\frac{x_{j+1}}{x_j},\dots,\frac{x_n}{x_j}\right)$$

Iz (1.5) sledi, da je ϕ_j dobro definirana, saj so razmerja x_i/x_j neodvisna od izbire homogenega predstavnika elementa v $\mathbb{RP}^n$. Očitno je ϕ_j bijekcija in lahko je preveriti, da je homeomorfizem. Njen inverz je

$$\phi_j^{-1}(y_1,\dots,y_n) = [y_1 : \dots : y_j : 1 : y_{j+1} : \dots : y_n] \in V_j.$$

Za vsak par indeksov $0 \le i < j \le n$ je prehodna preslikava med ϕ_i in ϕ_j enaka

$$\phi_{ij}(y) = \phi_i \circ \phi^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \left(\frac{y_1}{y_i},\dots,\frac{y_{i-1}}{y_i},\frac{y_{i+1}}{y_i},\dots,\frac{1}{y_i},\dots,\frac{y_n}{y_i}\right).$$

Odtod vidimo, da je $\{(V_j,\phi_j)\colon j=0,1,\dots,n\}$ realno analitičen atlas na $\mathbb{RP}^n$ oz. holomorfen atlas na $\mathbb{CP}^n$. Dokazali smo prvi del naslednje trditve.

Trditev 1.26 *Realni projektivni prostor $\mathbb{RP}^n$ z atlasom $\{(V_j,\phi_j) : j=0,1,\dots,n\}$ je kompaktna realno analitična mnogoterost dimenzije n, kompleksni projektivni prostor $\mathbb{CP}^n$ s tem atlasom pa je kompaktna kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije n.*

Projektivni podprostori. Projektivni prostor $\mathbb{P}^n$ vsebuje veliko linearno vloženih kopij prostora $\mathbb{P}^k$ za $1 \le k < n$ (to velja tako za realne kot za kompleksne projektivne prostore). Izberemo nek $(k+1)$-dimenzionalen linearen podprostor $\Sigma \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1}_* \arrow[d] & \Sigma\setminus\{0\} \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
\mathbb{CP}^n & \mathbb{P}(\Sigma)\cong\mathbb{CP}^k \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Kompleksne premice v Σ so točke v $\mathbb{P}(\Sigma) \cong \mathbb{CP}^k$.

Če je $k = n-1$, je Σ hiperravnina v $\mathbb{C}^{n+1}$, podana z netrivialno linearno enačbo $a_0 z_0 + \ldots + a_n z_n = 0$ ($a_j \neq 0$ za nek j). Prirejena projektivna hiperravnina v $\mathbb{CP}^n$ je

$$\mathbb{P}(\Sigma) = \left\{ [z_0 \colon z_1 \colon \ldots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n : \sum_{j=0}^{n} a_j z_j = 0 \right\}.$$

Definicija je neodvisna od predstavnika ekvivalenčnega razreda, saj se multiplikativen faktor $t \in \mathbb{C}^*$ krajša.

Projektivno zaprtje. Na preprostem primeru bomo opisali pojem *projektivnega zaprtja*. Vzemimo neko afino linearno hiperravnino $L \subset \mathbb{C}^n$:

$$L = \left\{ (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \zeta_j = 0 \right\}. \tag{1.6}$$

Prostor $\mathbb{C}^n$ vložimo na standarden način kot podmnožico v $\mathbb{CP}^n$:

$$\mathbb{C}^n = \left\{ [z_0 \colon z_1 \colon \ldots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n \colon z_0 \neq 0 \right\},$$

$$[z_0 \colon z_1 \colon \ldots \colon z_n] \cong \left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0} \right) = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Zanima nas, kaj je zaprtje $\overline{L} \subset \mathbb{CP}^n$. Enačbo (1.6) homogeniziramo (oz. projektiviziramo) tako, da vstavimo izraze

$$\zeta_j = \frac{z_j}{z_0}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

v enačbo za L in pomnožimo z z_0. Tako dobimo

$$\overline{L} = \left\{ [z_0 \colon z_1 \colon \ldots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n : \sum_{j=0}^{n} a_j z_j = 0 \right\}.$$

Presek $\overline{L}$ s hiperravnino v neskončnosti $H = \{z_0 = 0\} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ je enak

$$\overline{L} \cap H = \left\{ [0 \colon z_1 \colon \ldots \colon z_n] : \sum_{j=1}^{n} a_j z_j = 0 \right\}.$$

Torej je $\overline{L} \cap H$ hiperravnina v $H = \mathbb{CP}^{n-1}$, izomorfna prostoru $\mathbb{CP}^{n-2}$.
Konstrukcijo projektivizacije lahko posplošimo takole. Če je

$$L = \left\{ (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = 0 \right\},$$

kjer je P polinom stopnje d (ne nujno homogen), pišemo $\zeta_j = \frac{z_j}{z_0}$ in vstavimo v P:

$$\widetilde{P}(z_0, \ldots, z_n) = z_0^d P\left(\frac{z_j}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0} \right).$$

Homogen polinom $\widetilde{P}$ stopnje d se imenuje *homogenizacija* polinoma P. Množica

$$\overline{L} = \{[z_0\colon \dots : z_n] \in \mathbb{CP}^n \colon \widetilde{P}(z_0, \dots, z_n) = 0\}$$

je zaprtje množice $L \subset \mathbb{C}^n$ v projektivnem prostoru $\mathbb{CP}^n$.

Algebraične množice v projektivnem prostoru. Če je $P(z_0, \dots, z_n) \not\equiv 0$ homogen polinom stopnje $d \in \mathbb{N}$, potem je množica

$$A_P = \left\{[z_0\colon \dots : z_n] \in \mathbb{CP}^n : P(z_0, \dots, z_n) = 0\right\}$$

projektivno algebraična hiperploskev stopnje d. Lahko gledamo tudi množice, definirane z več homogenimi polinomskimi enačbami:

$$A_{P_1} \cap A_{P_2} \cap \ldots \cap A_{P_k} \ \dots \text{ projektivno algebraična podmnožica v } \mathbb{CP}^n. \tag{1.7}$$

Poljubna algebraična podmnožica $\mathbb{CP}^n$ je končna unija $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ množic A_j oblike (1.7).

Primer 1.27 Množica

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 = y^3\}$$

je afino algebraična kompleksna krivulja v $\mathbb{C}^2$ s singularnostjo v $(0, 0)$. Če pišemo $x = z/\zeta$ in $y = w/\zeta$ ter vstavimo v enačbo za C, dobimo enačbo za projektivno zaprtje C v projektivni ravnini $\mathbb{CP}^2$:

$$\overline{C} = \left\{[\zeta : z\colon w] \in \mathbb{CP}^2 : z^2\zeta = w^3\right\}.$$

Njen presek s premico v neskončnosti je

$$\overline{C} \cap \{\zeta = 0\} = \{[0\colon z\colon 0]\} = \{[0\colon 1\colon 0]\}.$$

Presečno število krivulje $\overline{C}$ s premico v neskončnosti $H = \{\zeta = 0\}$ v točki $[0\colon 1\colon 0]$ je enako 3; pravimo tudi, da je to trojna presečna točka.

Opomba 1.28 *Lokalno presečno število* dveh kompleksnih krivulj v $\mathbb{C}^2$ (ali v poljubni kompleksni ploskvi) izračunamo tako, da lokalno definicijsko funkcijo ene krivulje (v našem primeru npr. funkcijo ζ, ki definira projektivno premico $\{\zeta = 0\} = H$) zožimo na drugo krivuljo (v našem primeru $\overline{C}$) in jo izrazimo v lokalni karti na drugi krivulji, v kateri presečni točki ustreza izhodišče. Presečno število je tedaj red ničle zožene funkcije v izhodišču. Iz definicije sledi, da je lokalno presečno število dveh kompleksnih krivulj vselej pozitivno.

V zgornjem primeru je primerna lokalna koordinata na $\overline{C}$ funkcija w (saj presečni točki ustreza $w = 0$), zvezo med ζ in w (v lokalni karti $\{z = 1\}$ na $\mathbb{CP}^2$) pa nam podaja enačba $\zeta = w^3$. Red ničle funkcije ζ pri $w = 0$ je enak 3 in to je presečno število med $\overline{C}$ in H v točki $[0\colon 1\colon 0]$.

Globalno presečno število dveh krivulj je definirano kot vsota lokalnih presečnih števil v vseh presečnih točkah. Za krivulje v kompaktni komleksni ploskvi (kot npr.

$\mathbb{CP}^2$) je to vselej nenegativno (končno) celo število. Krivulje v odprtih ploskvah (kot npr. $\mathbb{C}^2$) pa se lahko sekajo v števni diskretni množici točk in v tem primeru globalnega presečnega števila ni mogoče smiselno definirati.

Naloga 1.29 *Dokaži, da je presečno število vsake kompleksne krivulje stopnje d v $\mathbb{CP}^2$ s katerokoli projektivno premico $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$ enako d, torej stopnji krivulje.*

1.4.5 Grassmanove mnogoterosti

Naj bo $1 \le k < n$. Označimo z $V_k(\mathbb{R}^n)$ množico vseh urejenih k-teric $x = (x^1, \dots, x^k)$ linearno neodvisnih vektorjev $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$. Očitno lahko $V_k(\mathbb{R}^n)$ identificiramo z množico vseh $n \times k$ matrik maksimalnega ranga k. Vsaka matrika $x \in V_k(\mathbb{R}^n)$ določa linearno lupino $\mathrm{Lin}(x) \subset \mathbb{R}^n$, ki je k-dimenzionalen vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^n$. Definirajmo relacijo na $V_k(\mathbb{R}^n)$ s predpisom

$$x \sim y \iff \mathrm{Lin}(x) = \mathrm{Lin}(y).$$

Ni težko preveriti, da je $V_k(\mathbb{R}^n)$ odprta podmnožica v $\mathbb{R}^{nk}$ in je $\sim$ ekvivalenčna relacija na njej. Elementa $x, y \in V_k(\mathbb{R}^n)$ sta ekvivalentna ($x \sim y$) natanko tedaj, ko obstaja matrika $A \in GL_k(\mathbb{R})$, tako da je $x \cdot A = y$ (matrični produkt). Nadalje lahko vidimo, da je relacija $\sim$ odprta in zaprta. Naj bo

$$\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n) = V_k(\mathbb{R}^n)/\sim \tag{1.8}$$

kvocientna projekcija: torej je $G_k(\mathbb{R}^n)$ množica vseh k-dimenzionalnih vektorskih podprostorov v $\mathbb{R}^n$. V posebnem je $G_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{RP}^{n-1}$.

Iz trditve 1.24 sledi, da je kvocientna topologija na $G_k(\mathbb{R}^n)$ Hausdorffova.

Na $G_k(\mathbb{R}^n)$ obstaja struktura realno analitične (natančneje, realno algebraične) mnogoterosti. Konstrukcija je podobna kot pri projektivnih prostorih. Izberemo multiindeks $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ z $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. Naj bo $U_I \subset V_k(\mathbb{R}^n)$ množica vseh matrik $x \in V_k(\mathbb{R}^n)$ z neizrojenim $k \times k$ minorjem x_I, sestavljenim iz vrstic $i_1, \dots, i_k$ matrike x. Naj bo $J = I^c = (j_1, \dots, j_{n-k})$ komplementarni multiindeks. Matrika $x(x_I)^{-1}$ očitno zadošča pogoju $(x(x_I)^{-1})_I = I^{k \times k}$ (identična $k \times k$ matrika), njen $(n-k) \times k$ minor $(x(x_I)^{-1})_J$ pa določa lokalno karto ϕ_I na odprti množici $\pi(U_I) = V_I \subset G_k(\mathbb{R}^n)$:

$$\phi_I : V_I \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{(n-k) \times k}, \qquad \phi_I([x]) = (x(x_I)^{-1})_J. \tag{1.9}$$

Lahko je videti, da je $\phi_I([x])$ res odvisna le od ekvivalečnega razreda elementa x: če je $x \sim y$, je $y = xA$ za neko $A \in GL_k(\mathbb{R})$, zato je $y(y_I)^{-1} = (xA)(xA)_I^{-1} = xAA^{-1}(x_I)^{-1} = x(x_I)^{-1}$.

Prehodne preslikave med kartami so očitno podane z racionalnimi funkcijami. Prostori $G_k(\mathbb{R}^n)$ se imenujejo *Grassmanove mnogoterosti*.

Preslikava $\Lambda \to \Lambda^{\perp}$, ki priredi podprostoru $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ njegov ortogonalni komplement, inducira realno analitičen izomorfizem $G_k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$. V posebnem je torej projektivni prostor $\mathbb{RP}^{n-1} = G_1(\mathbb{R}^n)$ izomorfen Grassmanovi mnogoterosti $G_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ vseh hiperravnin v $\mathbb{R}^n$ skozi izhodišče.

Če uporabimo isto konstrukcijo na $\mathbb{C}$-linearno neodvisnih k-tericah kompleksnih vektorjev $z = (z^1, \ldots, z^k) \in (\mathbb{C}^n)^k$, dobimo *kompleksno Grassmanovo mnogoterost* $G_k(\mathbb{C}^n)$ vseh k-razsežnih $\mathbb{C}$-linearnih podprostorov evklidskega prostora $\mathbb{C}^n$. V tem primeru so prehodne preslikave med kartami (1.9) komplekno racionalne, zato je $G_k(\mathbb{C}^n)$ kompleksno algebraična mnogoterost.

1.5 Gladke funkcije in preslikave mnogoterosti

Naj bo X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \in \{1, 2, \ldots, \infty, \omega, \mathscr{O}\}$.

Definicija 1.30 *Zvezna funkcija f na mnogoterosti X je gladka razreda $\mathscr{C}^r$ v točki $p \in X$ (realno analitična v primeru $r = \omega$; holomorfna v primeru $r = \mathscr{O}$), če je za neko lokalno karto (U, ϕ) na X (iz atlasa, ki določa dano $\mathscr{C}^r$ strukturo na X), $p \in U$, funkcija*

$$f \circ \phi^{-1} \colon \phi(U) \to \mathbb{R}$$

gladka razreda $\mathscr{C}^r$ v neki okolici točke $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$. Funkcija f je razreda $\mathscr{C}^r$ na X, če je $\mathscr{C}^r$ v vsaki točki $p \in X$.

V primeru, ko je X kompleksna mnogoterost dimenzije n, nadomestimo $\mathbb{R}^n$ s $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{R}$ s $\mathbb{C}$; funkcija $f \colon X \to \mathbb{C}$ je holomorfna, če je za vsako lokalno holomorfno karto (U, ϕ) na X funkcija $f \circ \phi^{-1} \colon \phi(U) \to \mathbb{C}$ holomorfna.

$$\begin{tikzcd}
p \in U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{R} \\
\phi(p) \in \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[ur, "f \circ \phi^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema 1.31 *Pogoj v definiciji 1.30 je neodvisen od izbire lokalne karte v danem $\mathscr{C}^r$ atlasu.*

Dokaz Naj bo (V, ψ) neka druga lokalna karta na X, $p \in V$. Tedaj je

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}).$$

Ker je $\phi \circ \psi^{-1}$ prehodna preslikava v $\mathscr{C}^r$ atlasu, je $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem. Odtod sledi, da je $f \circ \psi^{-1}$ razreda $\mathscr{C}^r$ natanko tedaj, ko je $f \circ \phi^{-1}$ razreda $\mathscr{C}^r$. $\square$

Definicijo gladke funkcije bomo sedaj posplošili na preslikave med mnogoterostmi.

Definicija 1.32 *Naj bosta X, Y dve $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti. Zvezna preslikava $f : X \to Y$ je gladka razreda $\mathscr{C}^r$ v točki $p \in X$, če obstajata lokalni karti (U, ϕ) na X ter (V, ψ) na Y, tako da velja $p \in U,\ f(U) \subset V$ in je preslikava*

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \pi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

razreda $\mathscr{C}^r$ v neki okolici točke $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$. Preslikava je razreda $\mathscr{C}^r$ na X, če je razreda $\mathscr{C}^r$ v vsaki točki iz X.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "\psi"] \\
U' \arrow[r] & V'
\end{tikzcd}$$

Lema 1.33 *Definicija je neodvisna od izbire lokalnih kart na X in Y.*

Dokaz Naj bo (U', ϕ') neka druga karta na X, $p \in U'$, ter (V', ψ') neka druga karta na Y, $f(p) \in V'$. Potem velja (oznako za kompozicijo izpustimo):

$$\psi' f(\phi')^{-1} = \psi'(\psi^{-1}\psi) f(\phi^{-1}\phi)(\phi')^{-1} = (\psi'\psi^{-1})(\psi f \phi^{-1})(\phi(\phi')^{-1}).$$

Preslikava $\psi'\psi^{-1}$ je prehodna preslikava med dvema kartama na Y, torej je $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem. Podobno je zadnja preslikava $\phi(\phi')^{-1}$ na desni prehodna preslikava med dvema kartama na X in zato $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem. Odtod sledi, da je preslikava $\psi f \phi^{-1}$ razreda $\mathscr{C}^r$ natanko tedaj, ko je $\psi' f(\phi')^{-1} \in \mathscr{C}^r$ razreda $\mathscr{C}^r$. $\square$

Definicija 1.34 *$\mathscr{C}^r$-difeomorfizem $f : X \to Y$ je bijektivna preslikava (homeomorfizem) med $\mathscr{C}^r$-mnogoterostima, ki je $\mathscr{C}^r$ ter je njen inverz f^{-1} tudi $\mathscr{C}^r$.*

Opomba 1.35 *Iz definicij sledi, da je vsaka lokalna karta (U, ϕ) na neki $\mathscr{C}^r$-mnogoterosti X $\mathscr{C}^r$-difeomorfizem $U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$.*

Trditev 1.36 *Kompozicija gladkih $\mathscr{C}^r$-preslikav mnogoterosti je spet $\mathscr{C}^r$-preslikava. Prav tako je kompozicija holomorfnih preslikav med kompleksnimi mnogoterostmi spet holomorfna preslikava.*

Dokaz Oglejmo si naslednji diagram preslikav:

$$\begin{tikzcd}
p \in U \subset X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, "\phi"] & f(p) \in V \subset Y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[d, "\psi"] & g(f(p)) \in W \subset Z \arrow[d, "\theta"] \\
0 \in \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, bend left, "\psi f \phi^{-1}", "\mathscr{C}^r"'] \arrow[rr, bend right, "\mathscr{C}^r", "(\theta g \psi^{-1})(\psi f \phi^{-1}) = \theta(gf)\phi^{-1}"'] & 0 \in \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, bend left, "\theta g \psi^{-1}", "\mathscr{C}^r"'] & 0 \in \theta(W) \subset \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Kompoziciji $g \circ f$ pripada v paru lokalnih kart (U, ϕ) na X in (W, θ) na Z preslikava $\theta(gf)\phi^{-1}$, ki je kompozicija $\mathscr{C}^r$ preslikav $\psi f \phi^{-1}$ ter $\theta g \psi^{-1}$ in je zato tudi sama razreda $\mathscr{C}^r$. Iz definicije sledi, da je $g \circ f$ razreda $\mathscr{C}^r$. Dokaz za kompleksen primer je analogen, le da realne evklidske prostore nadomestimo s kompleksnimi. $\square$

Iz trditve 1.36 sledi, da mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ $(r \in \{0, 1, \ldots, \infty, \omega)$ kot objekti ter preslikave razreda $\mathscr{C}^r$ kot morfizmi sestavljajo kategorijo. Prav tako kompleksne mnogoterosti kot objekti ter holomorfne preslikave kot morfizmi sestavljajo kategorijo.

Opomba 1.37 *Če sta X in Y $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti, sta avtomatično tudi $\mathscr{C}^k$ mnogoterosti za vsak $k < r$. Torej lahko govorimo o $\mathscr{C}^k$ preslikavah $X \to Y$ za vsak $k \leq r$. Ne moremo pa smiselno definirati pojma $\mathscr{C}^k$-preslikave za $k > r$.*

V nadaljevanju bomo uporabljali naslednje oznake:

- $\mathscr{C}^r(X, Y)$ je množica vseh $\mathscr{C}^r$-preslikav $X \to Y$.
- $\mathscr{C}^r(X) \stackrel{def}{=} \mathscr{C}^r(X, \mathbb{R})$ je algebra vseh $\mathscr{C}^r$ funkcij na X.
- $\mathscr{O}(X, Y)$ je množica vseh holomorfnih preslikav $X \to Y$ kompleksnih mnogoterosti in $\mathscr{O}(X) = \mathscr{O}(X, \mathbb{C})$ je množica vseh holomorfnih funkcij na X.

Iz definicij sledi, da vse lokalne lastnosti gladkih preslikav med evklidskimi prostori, ki se ohranjajo pri kompozicij z difeomorfizmi, veljajo tudi za preslikave mnogoterosti. Npr., definiramo lahko rang preslikave v točki.

Definicija 1.38 *Naj bo $f : X \to Y$ preslikava razreda $\mathscr{C}^1$. Izberimo lokalno karto (U, ϕ) na X in lokalno karto (V, ψ) na Y, tako da velja $p \in U$ in $f(U) \subset V$. Potem je*

$$\mathrm{rang}_p f = \mathrm{rang}_{\phi(p)} \psi \circ f \circ \phi^{-1}.$$

Lahko je preveriti, da je definicija ranga neodvisna od izbire para lokalnih kart, saj so prehodne preslikave med pari kart difeomorfizmi, ki ohranjajo rang.

Primer 1.39 Oglejmo si preslikave v projektivne prostore:

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{RP}^N, \qquad f(x) = [f_0(x) \colon \ldots \colon f_N(x)].$$

Ta preslikava je dobro definirana na množici $\{x \in X \colon f_j(x) \neq 0 \text{ za vsaj en } j\}$. Predpostavimo, da je ta množica kar enaka X.

Kdaj je f razreda $\mathscr{C}^r$?

Preverimo v lokalnih kartah $\mathbb{RP}^N$. Recimo, da je $f_j(a) \neq 0$ za nek $a \in X$. Torej velja isto v neki okolici $a \in U \subset X$. Sedaj vzamemo na $\mathbb{RP}^N$ lokalno karto

$$\psi\big([y_0 \colon \ldots \colon y_N]\big) = \left(\frac{y_0}{y_j}, \ldots, \frac{y_N}{y_j}\right) \in \mathbb{R}^n,$$

kjer smo na desni izpustili komponento $\frac{y_j}{y_j} = 1$:

$$(\psi \circ f)(x) = \left(\frac{f_0(x)}{f_j(x)}, \ldots, \frac{f_N(x)}{f_j(x)} \right) \in \mathbb{R}^N, \qquad xinU.$$

Odtod vidimo: Če so vse komponente f_j $\mathscr{C}^r$-funkcije na X, potem je preslikava $f\colon X \to \mathbb{RP}^N$ razreda $\mathscr{C}^r$.

Podobno vidimo, da je za kompleksno mnogoterost X preslikava

$$X \ni z \longmapsto [f_0(z)\colon f_1(z)\colon \ldots\colon f_N(z)] \in \mathbb{CP}^N$$

holomorfna, če so vse njene komponente f_j holomorfne funkcije in je v vsaki točki vsaj ena od komponent različna od nič.

Primer 1.40 *Meromorfna funkcija* na domeni $D \subset \mathbb{C}$ je holomorfna funkcija $f\colon D \setminus \{a_j\} \to \mathbb{C}$ na komplementu neke diskretne množice točk $\{a_j\} \subset D$, ki ima v vsaki točki a_j pol ali odpravljivo singularnost. Lokalno v okolici pola a_j je

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a_j)^{n_j}}, \qquad g \text{ holomorfna v okolici točke } a_j,\ \ n_j \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Brez izgube sploňosti lahko vzamemo, da je $g(a_j) \neq 0$ in je n_j stopnja pola. Meromorfni funkciji f priredimo preslikavo $\tilde{f}\colon D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1$ v Riemannovo sfero s predpisom

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{če je } z \neq a_j \text{ za vsak } j, \\ \infty & \text{če je } z = a_j \text{ za nek } j \end{cases}$$

Ker velja $\lim_{z \to a_j} |f(z)| = \infty$, je $\tilde{f}$ zvezna preslikava $D \to \mathbb{CP}^1$. Trdimo, da je $\tilde{f}$ holomorfna preslikava. V homogenih koordinatah $[z_0\colon z_1]$ na $\mathbb{CP}^1$ lahko zapišemo

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} [1\colon f(z)], & z \neq a_j \text{ za vsak } j, \\ [0\colon 1], & z = a_j \text{ za nek } j. \end{cases}$$

V okolici a_j uporabimo predstavitev (1.10) in dobimo

$$\tilde{f}(z) = \left[1\colon \frac{g(z)}{(z-a_j)^{n_j}} \right] = [(z-a_j)^{n_j}\colon g(z)] \in \mathbb{CP}^1.$$

Sedaj pogledamo $\tilde{f}$ v drugi karti $\psi([z_0 : z_1]) = z_0/z_1$:

$$(\psi \circ \tilde{f})(z) = \frac{(z-a_j)^{n_j}}{g(z)} \quad \text{holomorfna v okolici točke } a_j.$$

V točki $z = a_j$ ima $\psi \circ \tilde{f}$ ničlo reda n_j. Zato je $f\colon D \to \mathbb{CP}^1$ holomorfna.

Isti sklep velja, če je D poljubna Riemannova ploskev (eno dimenzionalna kompleksna mnogoterost). Npr., vsaka meromorfnna funkcija na $\mathbb{C}$, ki je periodična glede na neko mrežo (diskretno abelovo podgrupo) $\Gamma \subset \mathbb{C}$, inducira holomorfno preslikavo $\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{CP}^1$. Grupa Γ imam lahko bodisi en generator (npr., $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$)

bodisi dva generatorja (npr., $\mathbb{Z}+\mathrm{i}\mathbb{Z}\subset\mathbb{C}$). Kvocient $X=\mathbb{C}/\Gamma$ je v prvem primeru enak $\mathbb{C}^*$, v drugem primeru pa je (kompleksni) torus.

Z uporabo Weierstrassovega izreka obstoju holomorfnih funkcij s predpisanimi ničlami vidimo, da je vsaka meromorfna funkcija na neki domeni $D\subset\mathbb{C}$ oblike $f=\frac{g}{h}$, kjer sta g in h holomorfni funkciji na D. Prirejena preslikava $\tilde{f}\colon D\to\mathbb{CP}^1$ je

$$\tilde{f}(z)=\left[1\colon\frac{g(z)}{h(z)}\right]=[h(z)\colon g(z)]\in\mathbb{CP}^1.$$

Velja tudi obratno: vsaka holomorfna preslikava $D\subset\mathbb{C}\xrightarrow{\tilde{f}}\mathbb{CP}^1$, $\tilde{f}\not\equiv\infty$, definira meromorfno funkcijo na D.

Primer 1.41 Naj bo $F=(P_0,P_1,\dots,P_N)\colon\mathbb{C}^{n+1}\to\mathbb{C}^{N+1}$ holomorfna preslikava, katere komponente P_j so homogeni polinomi stopnje d (vsi iste stopnje!). Torej je $F(tz)=t^dF(z)$ za vsak $t\in\mathbb{C}$. Predpostavimo, da velja $F(z)=0\Leftrightarrow z=0$. (To lahko velja samo v primeru, ko je $n\le N$.) Torej F preslika vsako kompleksno premico v $\mathbb{C}^{n+1}$ skozi izhodišče $z=0$ v neko kompleksno premico skozi izhodišče v $\mathbb{C}^{N+1}$. Zato F določa natanko eno preslikavo $f\colon\mathbb{CP}^n\to\mathbb{CP}^N$, tako da komutira naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n+1}_* \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{C}^{N+1}_* \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{CP}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{CP}^N \end{tikzcd} \tag{1.11}$$

Naloga 1.42 *Preveri, da je f holomorfna preslikava, ki je v vsakem paru standardnih lokalnih kart na obeh projektivnih prostorih podana z racionalno preslikavo v spremenljivkah $z=(z_0,z_1\dots,z_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$.*

Oglejmo si poseben primer, ko je F linearna preslikava $F(z)=Az$, kjer je A kompleksna matrika dimenzije $(N+1)\times(n+1)$. Tedaj je F homogena preslikava stopnje 1 in pogoj $F^{-1}(0)=0$ je izpolnjen natanko tedaj, ko ima matrika A maksimalni rang n. Prirejena preslikava $\mathbb{CP}^n\to\mathbb{CP}^N$ v diagramu (1.11) je linearna vložitev projektivnih prostorov; v primeru $n=N$ je to linearni avtomorfizem prostora $\mathbb{CP}^n$. Grupa vseh linearnih avtomorfizmov $\mathbb{CP}^n$ se imenuje *projektivna linearna grupa*,

$$PGL_n(\mathbb{C})=GL_{n+1}(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*=GL_{n+1}(\mathbb{C})/\{\lambda I:\lambda\in\mathbb{C}^*\},$$

kjer I označije identično matriko.

1.6 Gladke particije enote

Eno od pomembnih orodij pri delu z mnogoterostmi je obstoj gladke particije enote, ki jo podaja izrek 1.43.

Naj bosta $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ in $\mathscr{V} = \{V_i\}$ dve odprti pokritji mnogoterosti X. Pravimo, da je pokritje $\mathscr{V}$ *finejše* od pokritja $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ (ali da je *včrtano* pokritju $\mathscr{U}$), če za vsak indeks i obstaja indeks $\alpha = \alpha(i)$, tako da je $V_i \subset U_\alpha$. Pokritje $\mathscr{V}$ je *lokalno končno*, če ima vsaka točka $x \in X$ okolico, ki jo seka največ končno mnogo elementov V_i pokritja. V tem primeru iz lokalne kompaktnosti X sledi, da tudi vsako kompaktno množico prostora X seka največ končno členov pokritja.

Izrek 1.43 (Gladke particije enote) *Naj bo X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \in \{0,1,2,\ldots,\infty\}$. Za vsako odprto pokritje $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ mnogoterosti X obstaja finejše lokalno končno pokritje $\mathscr{V} = \{V_i\}$ in funkcije $\psi_i : X \to [0,1]$ razreda $\mathscr{C}^r(X)$, tako da je $\mathrm{supp}(\psi_i) \subset V_i$ za vsak i ter $\sum_i \psi_i(x) = 1$ za vsak $x \in X$.*

Opomba 1.44 Iz principa identičnosti za realno analitične (in holomorfne) funkcije sledi, da ne obstaja netrivialna $\mathscr{C}^\omega$ funkcija s kompaktnim nosilcem na nekompaktni realno analitični mnogoterosti. Zato ni particij enote iz realno analitičnih funkcij. To je vir mnogih pomembnih razlik v tehnikah, ki se uporabljajo po eni strani na gladkih mnogoterostih in po drugi strani na realno analitičnih in kompleksnih mnogoterostih. $\square$

Dokaz Oglejmo si funkcijo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definirano s predpisom

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{če je } x > 0, \\ 0, & \text{če je } x \le 0. \end{cases}$$

Dobro je znano, da je $h \ge 0$ gladka funkcija razreda $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Izven točke 0 je celo realno analitična, v točki 0 pa velja $\lim_{x\to 0} h^{(k)}(x) = 0$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Očitno je pozitivna na $x > 0$. Sedaj definirajmo funkcijo

$$g(x) = h(x+1)h(-x+1) \ge 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Iz lastnosti h sledi, da je $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ in njen nosilec je enak $\mathrm{supp}(g) = [-1,+1]$.

Naj bodo $x = (x_1,\ldots,x_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$. Označimo

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Za vsak $\delta > 0$ je funkcija $g_\delta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, definirana s predpisom

$$g_\delta(x) = g(|x|^2/\delta^2) \ge 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.12}$$

gladka na $\mathbb{R}^n$ in njen nosilec je zaprta krogla polmera δ s središčem v $0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{supp}(g_\delta) = \overline{\mathbb{B}}^n(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le \delta\}.$$

Naj bo X mnogoterost dimenzije n in razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \in \{0,1,2,\ldots,\infty\}$. Kompaktna množica $K \subset X$ se imenuje (zaprta) *koordinatna krogla*, če obstaja karta (U,ϕ) na X (iz maksimalnega $\mathscr{C}^r$ atlasa na X), kjer je U neka odprta okolica množice K, tako da je $\phi(K) = \overline{\mathbb{B}}^n(\delta)$ za nek $\delta > 0$. Notranjost $\mathring{K}$ se imenuje *odprta koordinatna krogla*, saj jo ϕ preslika na odprto kroglo $\mathbb{B}^n(\delta)$. Naj bo g_δ funkcija (1.12). Funkcija $g_\delta \circ \phi \ge 0$ je tedaj gladka na U in $\operatorname{supp}(g_\delta) = K$. Zato lahko g_δ razširimo do gladke funkcije razreda $\mathscr{C}^r$ na X, ki je enaka 0 na $X \setminus U$.

Izberimo normalno izčrpanje X z naraščajočim zaporedjem kompaktov:

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k = X, \qquad L_k \subset \mathring{L}_{k+1} \text{ za vsak } k \in \mathbb{N}.$$

Če je X kompaktna, vzamemo $X = L_1$, ostalih množic pa ne bomo potrebovali.

Pokritje $\mathscr{V} = \{V_i\}$ in funkcije ψ_i v izreku bomo konstruirali induktivno.

V prvem koraku izberemo za vsako točko $x \in L_1$ neko karto (V_x, ϕ_x) na X, tako da je $\overline{V}_x \subset \mathring{L}_2$, $\phi_x(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ in je V_x vsebovana v eni od množic pokritja $\mathscr{U}$. Izberimo $\delta_x > 0$ dovolj majhen, da je $\overline{\mathbb{B}}^n(\delta_x) \subset \phi_x(V_x)$. Množica $W_x = \phi_x^{-1}(\mathbb{B}^n(\delta_x))$ je tedaj odprta koordinatna krogla, ki zadošča $\overline{W}_x \subset V_x$. Funkcija $g_x = g_{\delta_x} \circ \phi_x \ge 0$ je razreda $\mathscr{C}^r$ na V_x in $\operatorname{supp}(g_x) = \overline{W}_x$. Kot zgoraj jo razširimo do $\mathscr{C}^r$ funkcije na X, ki je enaka 0 na $X \setminus V_x$. Ker je množica L_1 kompaktna, končno mnogo tako dobljenih koordinatnih krogel W_x pokriva L_1; označimo jih z $W_1, \ldots, W_{i_1}$, pripadajoče večje koordinatne okolice z $V_1, \ldots, V_{i_1}$ (kjer je $\overline{W}_i \subset V_i$), dobljene funkcije pa z $g_1, \ldots, g_{i_1} \in \mathscr{C}^r(X)$, $\operatorname{supp}(g_i) = \overline{W}_i$.

Če je mnogoterost X kompaktna in $L_1 = X$, smo postopek zaključili in gremo na zaključek dokaza.

Denimo sedaj, da X ni kompaktna. Tedaj v drugem koraku ponovimo isti postopek za kompaktno množico $\overline{L_2 \setminus L_1}$ ter dobimo končno družino koordinatnih krogel $W_{i_1+1} \subset V_{i_1+1}, \ldots, W_{i_2} \subset V_{i_2}$ in nenegativnih funkcij $g_{i_1+1}, \ldots, g_{i_2} \in \mathscr{C}^r(X)$ za nek $i_2 > i_1$, tako da za vsak $i = i_1+1, \ldots, i_2$ velja $\operatorname{supp}(g_i) = \overline{W}_i$ in V_i leži v eni od množic pokritja $\mathscr{U}$ ter v množici $\mathring{L}_3$. Postopek induktivno ponavljamo. V k-tem koraku za nek $k \ge 3$ dodamo obstoječi družini (W_i, V_i, g_i) za $i = 1, \ldots, i_{k-1}$ končno družino takih trojic za indekse $i = i_{k-1}+1, \ldots, i_k$, tako da je vsaka množica V_i vsebovana v eni od množic $U_\alpha \in \mathscr{U}$ in velja

$$V_i \subset \mathring{L}_{k+1} \setminus L_{k-2}, \qquad \overline{L_k \setminus L_{k-1}} \subset \bigcup_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} W_i.$$

Naj bo $\{(W_i, V_i, g_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ tako dobljena družina. (V primeru $X = L_1$ je to končna družina iz prvega koraka.) Iz konstrukcije je očitno, da je $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i = X$ in je družina $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ lokalno končna. Funkcija $g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$ je pozitivna in razreda $\mathscr{C}^r(X)$. (Ker je družina nosilcev $\operatorname{supp}(g_i)$ lokalno konča, je na vsaki kompaktni množici $K \subset X$

le končno mnogo členov vrste različnih od nič, zato vrsta konvergira v $\mathscr{C}^r(X)$ topologiji na kompaktih v X.) Funkcije $\psi_i = g_i/g \in \mathscr{C}^r(X)$ tedaj zadoščajo pogoju $\mathrm{supp}(\psi_i) = \overline{W}_i$ in $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i = 1$. Izrek je s tem dokazan. $\square$

Posledica 1.45 *Naj bosta E in F zaprti disjunktni podmnožici $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti X. Tedaj obstaja $\mathscr{C}^r$ funkcija $\chi\colon X \to [0,1]$, ki je enaka 0 na E in je enaka 1 na F.*

Dokaz Izberimo pokritje $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ mnogoterosti X, tako da vsaka množica U_α seka kvečjemu eno od množic E,F. Naj bo $\{(V_i,\psi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ prirejena particija enote kot v izreku 1.43. Funkcija $\chi = \sum_i' \psi_i \in \mathscr{C}^r(X)$, kjer je vsota po tistih indeksih i, za katere je $V_i \cap E \neq \varnothing$, očitno zadošča posledici. $\square$

1.7 Podmnogoterosti

Modeli gladkih podmnogoterosti so gladke krivulje in ploskve v evklidskem prostoru. Pojem podmnogoterosti bomo sedaj definirali za podmnožice v poljubni gladki ali kompleksni mnogoterosti.

Definicija 1.46 *Naj bo X gladka mnogoterost dimenzije m in razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty,\omega\}$. Podmnožica $N \subset X$ se imenuje $\mathscr{C}^r$* podmnogoterost *dimenzije n, če za vsako točko $p \in N$ obstaja odprta okolica $U \subset X$ in lokalna karta $\phi\colon U \to U' \subset \mathbb{R}^m$ (v maksimalnem atlasu, ki določa $\mathscr{C}^r$ strukturo na X), tako da velja*

$$\phi(N \cap U) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap U'. \tag{1.13}$$

Povsem analogno definiramo pojem kompleksne podmnogoterosti.

Naj bo $\pi\colon \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ koordinatna projekcija $\pi(x_1,\ldots,x_m) = (x_1,\ldots,x_n)$. Vsaka lokalna karta (U,ϕ) na X, ki zadošča pogoju (1.13), se imenuje *odlikovana karta* glede na N. Priredimo ji lokalno karto na N:

$$(N \cap U, \pi \circ \phi|_{N\cap U}), \qquad \pi \circ \phi|_{N\cap U} : N \cap U \to (\pi \circ \phi)(N \cap U) \subset \mathbb{R}^n.$$

Množica tako dobljenih kart sestavlja atlas $\mathscr{U}'$ na N. Prehodne preslikave med kartami v tem atlasu so zožitve prehodnih preslikav med kartami atlasa $\mathscr{U}$ in so zato razreda $\mathscr{C}^r$. Torej atlas $\mathscr{U}'$ določa na N strukturo $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti; imenujemo jo *podmnogoterostna struktura*. Število

$$\mathrm{codim}(N,X) = \dim X - \dim N$$

se imenuje *kodimenzija* podmnogoterosti N v mnogoterosti X. Podmnogoterost kodimenzije 1 se imenuje *hiperploskev*.

Iz definicij očitno sledi naslednja trditev.

Trditev 1.47 *Naj bosta X in Y $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti in naj bo $N \subset Y$ podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti Y. Zvezna preslikava $f\colon X \to N \subset Y$ je razreda $\mathscr{C}^r$ (kot preslikava v mnogoterost N s podmnogoterostno strukturo) natanko tedaj, ko je razreda $\mathscr{C}^r$ kot preslikava v ambientno mnogoterost Y.*

Z uporabo definicije ter particije enote (glej izrek 1.43) je lahko dokazati naslednje.

Trditev 1.48 (Razširitve gladkih funkcij s podmnogoterosti) *Naj bo N zaprta $\mathscr{C}^r$ podmnogoterost mnogoterosti X. Tedaj za vsako funkcijo $f \in \mathscr{C}^r(N)$ obstaja funkcija $F \in \mathscr{C}^r(X)$, tako da je $F|_N = f$.*

Analogen razširitveni izrek v splošnem ne velja za preslikave med mnogoterostmi zaradi topoloških obstrukcij. Npr., če je

$$X = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}, \quad Y = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}, \quad N = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

se vložitev $f : N \hookrightarrow Y$, $f(z) = z$, ne da razširiti do zvezne preslikave $F\colon X \to Y$, saj je f homotopna konstantni preslikavi v krogu X, ne pa tudi v kolobarju Y.

Primer 1.49 Če je $U \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in je $f = (f_1,\dots,f_d)\colon U \to \mathbb{R}^d$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$, potem je njen graf

$$G_f = \{(x, f(x))\colon x \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$$

podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$. Preslikava

$$\phi\colon U \times \mathbb{R}^d \to U \times \mathbb{R}^d, \qquad \phi(x,y) = (x, y - f(x)),$$

je difeomorfizem, ki graf G_f preslika na $U \times \{0\}^d$, torej ga globalno izravna.
Analogno je graf holomorfne preslikave $f = (f_1,\dots,f_d)\colon U \to \mathbb{C}^d$ na domeni $U \subset \mathbb{C}^n$ kompleksna podmnogoterost kompleksne kodimenzije d v $U \times \mathbb{C}^d \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$.

Podmnogoterosti lahko lokalno, včasih pa tudi globalno, predstavimo kot nivojnice gladkih preslikav. Pri tem igra odločilno vlogo naslednji klasični izrek.

Izrek 1.50 (Izrek o implicitni funkciji) *Naj bo $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$.*
Če je f funkcija razreda $\mathscr{C}^r$ v okolici točke $p \in \mathbb{R}^m$ in je $df_p \neq 0$, potem lahko nivojnico $Z = f^{-1}(f(p))$ v okolici točke p predstavimo kot graf $\mathscr{C}^r$ funkcije $m-1$ spremenljivk; torej je Z lokalna $\mathscr{C}^r$ hiperploskev v okolici točke p.
Splošneje, če je $f = (f_1,\dots,f_d)\colon U \to \mathbb{R}^d$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$ v neki okolici točke $p \in \mathbb{R}^m$ in ima diferencial df_p v točki p maksimalen rang d, potem je nivojnica $Z = f^{-1}(f(p))$ lokalno v okolici točke p predstavljiva kot graf neke $\mathscr{C}^r$ preslikave $g = (g_1,\dots,g_d)$ nad domeno v $\mathbb{R}^{m-d}$. Torej je Z podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ in kodimenzije d (ter dimenzije $m-d$) v neki okolici točke p.

Natančneje: Če je f funkcija razreda $\mathscr{C}^r$ v okolici točke $p = (p_1,\dots,p_m) \in \mathbb{R}^m$ za nek $r \geq 1$ in je $\frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \neq 0$, potem lahko v neki okolici točke p nivojnico $\{f = f(p)\}$ predstavimo kot graf

$$x_m = g(x_1, \dots, x_{m-1})$$

neke $\mathscr{C}^r$ funkcije g, definirane v okolici točke $(p_1, \dots, p_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Koordinatna projekcija $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_{m-1})$ zato podaja lokalno karto razreda $\mathscr{C}^r$ v okolici p na nivojnici $Z = \{f^{-1}(f(p))\}$.

Analogen izrek velja za holomorfne preslikave. Ker je izrek o implicitni funkciji lokalne narave, velja tudi za funkcije in preslikave na mnogoterostih.

Primer 1.51 Sfera $\mathbb{S}^n_\rho$ s središčem 0 in polmerom $\rho > 0$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ je podana z enačbo

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = \rho^2.$$

Ker je diferencial df_p enak 0 samo v izhodišču $p = 0$, je $\mathbb{S}^n_\rho$ realno analitična hiperploskev v $\mathbb{R}^{n+1}$ za vsak $\rho > 0$.

Podobno dobimo *kompleksno sfero* $\Sigma \subset \mathbb{C}^{n+1}$ kot nivojnico zgornje funkcije, pri čemer spremenljivke $x_0, \dots, x_n$ zavzamejo poljubne kompleksne vrednosti.

Primer 1.52 Če je X gladka mnogoterost dimenzije m z robom, potem je njen rob ∂X gladka podmnogoterost dimenzije $m-1$. Npr., enotna sfera $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ je rob zaprte enotne krogle

$$\overline{\mathbb{B}}^{m+1} = \left\{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \colon x_0^2 + \ldots + x_m^2 \le 1\right\}.$$

Primer 1.53 Za vsako zaprto množico $E \subset \mathbb{R}^n$ obstaja nenegativna gladka funkcija $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, da je $\{f = 0\} = E$. Torej nivojnica $f^{-1}(0)$ gladke funkcije v splošnem ni mnogoterost. V tem primeru pogoji izreka o implicitni funkciji niso izpolnjeni.

Izrek o implicitni funkciji je preprosta posledica izreka o inverzni preslikavi. V posebnem primeru $d = 1$ je redukcija naslednja. Preslikava

$$F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_{m-1}, f(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^m$$

je razreda $\mathscr{C}^r$ v okolici točke p. Njen diferencial dF je podan z Jacobijevo matriko

$$\mathscr{J}_F = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & I_{m-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \partial f/\partial x_1 & \dots & \partial f/\partial x_{m-1} & \partial f/\partial x_m \end{array}\right]$$

Ker je $\det \mathscr{J}_F = \frac{\partial f}{\partial x_m} \neq 0$, je po izreku o inverzni preslikavi F obrnljiva v točki p. Torej lahko enačbo $F(x) = y$ enolično rešimo kot $x = G(y)$ za y v okolici točke $F(p)$. S primerjavo koordinat dobimo naslednje enačbe za komponente preslikave G:

$$x_1 = y_1,\ \dots,\ x_{m-1} = y_{m-1},\ \ x_m = g_m(x_1, \dots, x_{m-1}, y_m).$$

Ker je nivojnica $Z = \{f = f(p)\}$ določena z enačbo $y_m = f(p)$, iz zgornjih enačb sledi, da je Z lokalno predstavljena z grafom

$$x_m = g_m(x_1, \dots, x_{m-1}, f(p)).$$

Ker je izrek o implicitni funkciji lokalen, velja za preslikave med gladkimi mnogoterostmi preko prehoda na lokalne karte. Velja torej naslednja trditev.

Trditev 1.54 *Naj bosta X in Y mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ $(r \geq 1)$ in $f\colon X \to Y$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$. Denimo, da za neko točko $y_0 \in Y$ velja*

$$\operatorname{rang}_x f = \dim Y \qquad \forall x \in f^{-1}(y_0).$$

Potem je množica $f^{-1}(y_0)$ podmnogoterost X razreda $\mathscr{C}^r$ in kodimenzije $\dim Y$*; torej*

$$\dim X = \dim f^{-1}(y_0) + \dim Y.$$

Definicija 1.55 *Število $c \in \mathbb{R}$ je* regularna vrednost *funkcije $f \in \mathscr{C}^r(X)$ $(r \geq 1)$, če je f ranga 1 v vsaki točki $p \in f^{-1}(c)$. (Vsaka vrednost $c \in \mathbb{R} \setminus f(X)$ izven zaloge vrednosti je po definiciji regularna vrednost fnkcije f.) Vrednost $c \in f(X)$, ki ni regularna vrednost, se imenuje* kritična vrednost.
Splošneje, naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \geq 1$. Točka $y \in Y$ je regularna vrednost *preslikave f, če ima f rang $d =$* $\dim Y$ *v vsaki točki $x \in f^{-1}(y)$.*

Iz definicije sledi, da je število c kritična vrednost funkcije f natanko tedaj, ko nivojnica $f^{-1}(c)$ vsebuje vsaj eno *kritično točko*, to je točko p, v kateri ima f rang nič. V takih točkah nivojnica ni nujno mnogoterost, kot prikaže naslednji primer.

Primer 1.56 Oglejmo si ravninsko krivuljo, podano z enačbo

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^3\right\}.$$

Ekvivalentno: $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Lahko jo parametriziramo s $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = t^3, \quad y(t) = t^2.$$

V okolici točke $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ krivulja C ni gladka podmnogoterost, je pa topološka mnogoterost.
Naloga: Oglej si nivojnice $x^2 - y^3 = c$ za $c \neq 0$ in pokaži, da so realno analitične podmnogoterosti $\mathbb{R}^2$ dimenzije 1 (krivulje).

Izrek o implicitni funkciji je poseben primer naslednjega izreka o rangu.

Izrek 1.57 (Izrek o rangu preslikave) *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ domena in $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \geq 1$. Če je rang*

$$k = \operatorname{rang} df_x = \operatorname{rang}_x f \in \{0, 1, \dots, \min\{m,n\}\}$$

neodvisen od točke $x \in D$, potem za vsako točko $p \in D$ obstajata $\mathscr{C}^r$ karti (U, ϕ) na $\mathbb{R}^n$ in (V, ψ) na $\mathbb{R}^m$, tako da je $p \in U \subset D$, $\phi\colon U \xrightarrow{\cong} U' \subset \mathbb{R}^n$, $\phi(p) = 0$, $f(U) \subset V$,

$\psi\colon V \xrightarrow{\cong} V' \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(f(p)) = 0$, *in je preslikava* $\tilde{f} = \psi \circ f|_U \circ \phi^{-1}\colon U' \to V'$ *enaka*

$$\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0), \quad x = (x_1,\ldots,x_n) \in U'.$$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle\phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ U' & \xrightarrow{\tilde{f}} & V' \end{array}$$

Torej je $\tilde{f} = \iota \circ \pi$, pri čemer je

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad \pi(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_k) \quad \text{(koordinatna projekcija)},$$

$$\iota\colon \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \iota(x_1,\ldots,x_k) = (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \quad \text{(vložitev)}.$$

Izrek o rangu se dokaže podobno kot izrek o implicitni funkciji z redukcijo na izrek o inverzni preslikavi. Ker je izrek lokalen, se direktno posploši na mnogoterosti.

Lokalni difeomorfizmi, imerzije, submerzije:

1. $k = m = n \Longrightarrow \tilde{f} = \mathrm{Id}$. Preslikava f je *lokalni difeomorfizem*.
2. $k = n \le m \Longrightarrow \tilde{f}(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$; f se imenuje *imerzija*.
3. $n \ge m = k \Longrightarrow \tilde{f}(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_m)$ je projekcija na prvih m koordinat; preslikava f s to lastnostjo se imenuje *submerzija*.

Iz trditve 1.54 in definicije submerzije sledi naslednje.

Posledica 1.58 *Če je $f\colon X \to Y$ submerzija, je vsako vlakno $f^{-1}(y) \subset X$ $(y \in Y)$ podmnogoterost kodimenzije* $\dim Y$ *mnogoterosti X.*

1.8 Imerzije in vložitve mnogoterosti

Naj bosta X in Y mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \in \{1,2,\ldots,\infty,\omega,\mathscr{O}\}$. Zanima nas, kdaj je slika $f(X) \subset Y$ neke $\mathscr{C}^r$ preslikave $f\colon X \to Y$ podmnogoterost v Y. Izrek o rangu (Izrek 1.57) pove naslednje:

Trditev 1.59 *Če je $f\colon X \to Y$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$ s konstantnim rangom k, ima vsaka točka $p \in X$ odprto okolico $U \subset X$, tako da je $f(U) \subset Y$ podmnogoterost dimenzije k in razreda $\mathscr{C}^r$ v Y. V posebnem to velja za vsako imerzijo $f\colon X \to Y$ (preslikavo z rangom enakim $n = \dim X$ v vsaki točki $x \in X$).*

Torej je vsaka imerzija $f\colon X \to Y$ *lokalna vložitev* v smislu, da ima vsaka točka $p \in X$ odprto okolico $U \subset X$, tako da je $f|_U\colon U \to f(U) \subset Y$ vložitev. Zaloga vrednosti

$f(X) \subset Y$ (injektivne) imerzije $f\colon X \to Y$ se imenuje (injektivno) imerzirana podmnogoterost. Globalno gledano slika imerzije ni nujno podmnogoterost iz različnih razlogov. Najočitnejši so morebitne dvojne točke (samopresečišča) preslikave f, vendar to ni edini razlog. Zelo komplicirane injektivno imerzirane mnogoterosti, ki niso podmnogoterosti v smislu definicije 1.46, se pojavijo pri študiju dinamičnih sistemov, npr. kot tokovnice vektorskih polj ali kot stabilne in nestabline mnogoterosti negibnih točk difeomorfizmov. Za vsak par povezanih mnogoterosti X,Y dimenzij $1 \le \dim X < \dim Y$ obstaja injektivna imerzija $f\colon X \to Y$, katere slika $f(X)$ je povsod gosta v ambientni mnogoterosti Y; slika $f(X)$ torej ni podmnogoterost v nobeni točki $y \in f(X)$.

Pozitiven odgovor na zastavljeno vprašanje daje naslednji izrek.

Izrek 1.60 (Vložitve mnogoterosti) *Naj bo $f\colon X \to Y$ injektivna imerzija razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \ge 1$. Slika $f(X) \subset Y$ je $\mathscr{C}^r$ podmnogoterost mnogoterosti Y (v smislu definicije 1.46) natanko tedaj, ko je $f\colon X \to f(X)$ homemorfizem, pri čemer je $f(X)$ opremljena z relativno topologijo podprostora v Y.*

Definicija 1.61 *Injektivna $\mathscr{C}^r$ imerzija $f\colon X \to Y$, ki je homemorfizem X na sliko $f(X) \subset Y$ glede na relativno topologiji na $f(X)$, se imenuje $\mathscr{C}^r$* vložitev *X v Y.*

Dokaz Naj bo $f\colon X \to Y$ injektivna imerzija razreda $\mathscr{C}^r$. Označimo $n = \dim X$ in $m = \dim Y$; torej je $n \le m$. Izberimo točko $q \in f(X)$. Tedaj obstaja natanko ena točka $p \in X$, da je $q = f(p)$. Po izreku o rangu (izrek 1.57) obstajajo odprta okolica $U \subset X$ točke p, odprta okolica $V \subset Y$ točke q in lokalna karta $\psi\colon V \to V' \subset \mathbb{R}^m$, da je

$$\psi(q) = 0, \quad \psi(f(U) \cap V) = V' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}). \tag{1.14}$$

Predpostavimo, da je $f\colon X \to f(X)$ homeomorfizem. Tedaj je množica $f(U)$ odprta v relativni topologiji na $f(X)$. Zato obstaja odprta množica $W \subset Y$, tako da je $f(U) = f(X) \cap W$. Množica $V_0 = V \cap W$ je odprta okolica točke $q = f(p)$ v Y. Naj bo $V_0' = \psi(V_0) \subset V' \subset \mathbb{R}^m$. Tedaj iz (1.14) in $f(U) = f(X) \cap W$ sledi

$$\psi(f(X) \cap V_0) = V_0' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}). \tag{1.15}$$

Ker to velja za poljubno točko $q \in f(X)$, je $f(X)$ podmnogoterost v Y.

Obratno, predpostavimo da je $f(X)$ podmnogoterost v Y. Fiksirajmo točko $p \in X$. Tedaj obstaja okolica $V_0 \subset Y$ točke $q = f(p) \in Y$ in lokalna karta $\psi\colon V_0 \to V_0' \subset \mathbb{R}^m$, ki zadošča pogoju (1.15). Ker je f imerzija, obstaja okolica $U \subset X$ točke p, tako da je $f(U) \subset V_0$ in je $\psi \circ f\colon U \to (\psi \circ f)(U) = V'$ difeomorfizem na odprto podmnožico $V' \subset (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap V_0'$ v podprostoru $\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n} \subset \mathbb{R}^m$. Izberimo odprto množico $W' \subset V_0'$, tako da je $V' = W' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n})$. Ker je $\psi\colon V_0 \to V_0'$ homeomorfizem, je množica $W = \psi^{-1}(W') \subset Y$ odprta v Y. Iz definicije sledi $f(U) = f(X) \cap W$. To pomeni, da je množica $f(U)$ odprta v relativni topologiji na $f(X)$. Ker to velja za vsako dovolj majhno odprto okolico $U \subset X$ poljubne točke $p \in X$, je preslikava $f\colon X \to f(X)$ odprta. Ker je tudi zvezna in bijektivna, je homeomorfizem. $\square$

Naslednja definicija uvaja pomemben pojem prave preslikave. To je sorazmerno preprosto preverljiv topološki pogoj, ki med drugim zagotovi, da je preslikava zaprta (to je, slika vsake zaprte množice v domeni je zaprta množica v kodomeni, glej točko (d) v nalogi 1.63). Torej je injektivna zvezna prava preslikava $f\colon X \to Y$ homeomorfizem X na sliko $f(X) \subset Y$ v relativni topologiji.

Definicija 1.62 *Zvezna preslikava $f\colon X \to Y$ topoloških prostorov se imenuje* prava*, če je za vsako kompaktno množico $K \subset Y$ praslika $f^{-1}(K) = \{x \in X\colon\ f(x) \in K\}$ tudi kompaktna.*

Naloga 1.63 *Naj bosta X in Y lokalno kompaktna Hausdorffova topološka prostora (npr. mnogoterosti). Dokaži naslednje trditve.*

(a) *Če je X kompakten prostor, je vsaka zvezna preslikava $f\colon X \to Y$ prava.*

(b) *Preslikava $f\colon X \to Y$ je prava natanko tedaj, ko je za vsako diskretno množico $A = \{a_j\} \subset X$ njena slika $f(A) = \{f(a_j)\} \subset Y$ diskretna v Y. (Podmnožica $A \subset X$ je diskretna, če je zaprta in je vsaka njena točka izolirana.) V posebnem je preslikava $f\colon X \to \mathbb{R}^N$ prava natanko tedaj, ko za vsako diskretno množico $A = \{a_j\} \subset X$ velja $\lim_{j\to\infty} |f(a_j)| = +\infty$.*

(c) *Dokaži, da ima vsaka $\mathscr{C}^r$ mnogoterost X pravo $\mathscr{C}^r$ funkcijo $\rho\colon X \to [0, +\infty)$, to je funkcijo, za katero je vsaka zaprta podnivojnica $\{x \in X : \rho(x) \le c\}$ $(c \in \mathbb{R})$ kompaktna. (Navodilo: uporabi normalno izčrpanje X z zaporedjem kompaktov in particijo enote.)*

(d) *Naj bosta X in Y kompaktni topološki mnogoterosti z robom in naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna preslikava, ki preslika notranjost $\mathring{X} = X \setminus \partial X$ v notranjost $\mathring{Y} = Y \setminus \partial Y$. Dokaži, da je preslikava $f\colon \mathring{X} \to \mathring{Y}$ prava natanko tedaj, ko velja $f(\partial X) \subset \partial Y$, to je, f preslika rob mnogoterosti X v rob mnogoterosti Y.*

(e) *Vsaka prava preslikava $f\colon X \to Y$ je* zaprta*, to je, slika $f(E) \subset Y$ poljubne zaprte množice $E \subset X$ je zaprta množica v Y.*

(f) **(Lokalizacija pravih preslikav.)** *Če je f prava, potem za vsako točko $q \in Y$ in odprto množico $U \subset X$, ki vsebuje prasliko $f^{-1}(q)$, obstaja taka odprta okolica $V \subset Y$ točke q, da je $f^{-1}(V) \subset U$.*

Iz točke (d) v nalogi 1.63 in izreka 1.60 sledi naslednje:

Posledica 1.64 *Če je $f\colon X \to Y$ prava injektivna imerzija razreda $\mathscr{C}^r$, je slika $f(X) \subset Y$ zaprta $\mathscr{C}^r$ podmnogoterost mnogoterosti Y in $f\colon X \to f(X)$ je $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem.*

Naslednji klasični izrek je dokazal H. Whitney (1936).

Izrek 1.65 *Za vsako mnogoterost X razreda $\mathscr{C}^r$ $(r = 1, 2, \dots, \infty)$ obstaja prava $\mathscr{C}^r$ vložitev $f\colon X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ v Evklidski prostor dimenzije $N = 2\dim X + 1$.*

Naloga 1.66 *Z uporabo lokalnih kart in particije enote dokaži, da ima vsaka kompaktna $\mathscr{C}^r$ mnogoterost X vložitev $f\colon X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ razreda $\mathscr{C}^r$ v nek Evklidski prostor.*

Izrek velja tudi v realno analitični kategoriji, vendar ga je dokazal šele leta 1958 Hans Grauert z uporabo kompleksno analitičnih metod.

Analogen izrek v splošnem ne velja v kategoriji kompleksnih mnogoterosti. Eden od očitnih razlogov je, da kompaktna povezana kompleksna mnogoterost nima nobene nekonstantne holomorfne funkcije zaradi principa maksimuma. Iz istega razloga kompleksna mnogoterost X, ki vsebuje kakšno kompaktno kompleksno podmnogoterost pozitivne dimenzije, ne dopušča nobene injektivne holomorfne preslikave $f\colon X \to \mathbb{C}^N$.

Kompleksna mnogoterost X, ki ima pravo holomorfno vložitev $X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ v nek kompleksen Evklidski prostor, se imenuje *Steinova mnogoterost*. V tem primeru ima X pravo holomorfno vložitev v $\mathbb{C}^{2\dim X+1}$, in celo v $\mathbb{C}^{\left[\frac{3\dim X}{2}\right]+1}$ če je $\dim X \geq 2$. Ta pomemben razred kompleksnih mnogoterosti je v literaturo vpeljal Karl Stein leta 1951. Riemannova ploskev X je Steinova natanko tedaj, ko je odprta (nekompaktna); to sta leta 1949 dokazala H. Behnke in K. Stein. Vsaka odprta Riemannova ploskev ima pravo holomorfno vložitev kot kompleksna krivulja v $\mathbb{C}^3$, ni pa znano, ali ima holomorfno vložitev tudi v $\mathbb{C}^2$.

Kompaktna kompleksna mnogoterost X se imenuje *projektivno algebraična*, če obstaja holomorfna vložitev $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$ v nek kompleksen projektivni prostor. (Ker je X kompaktna, je vsaka preslikava $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$ prava.) V tem primeru obstaja vložitev v $\mathbb{CP}^N$ kjer je $N = 2\dim_{\mathbb{C}} X + 1$. V posebnem ima vsaka kompaktna Riemannova ploskev holomorfno vložitev v $\mathbb{CP}^3$. Projektivne mnogoterosti in splošnejše projektivno algebraične množice s singularnostmi ter algebraične preslikave med njimi (glej razdelek 1.4.4) so osnovni objekti algebraične geometrije.

1.9 Krovne in kvocientne mnogoterosti

V tem razdelku si bomo ogledali pojem krovne projekcije ter zvezo med krovnimi prostori in diskretnimi grupami avtomorfizmov mnogoterosti.

Trditev 1.67 *Naj bo $\pi\colon X \to Y$ lokalni homeomorfizem Hausdorffovih 2-števnih prostorov. Če ima Y strukturo $\mathscr{C}^r$-mnogoterosti, potem obstaja na X natanko določena struktura $\mathscr{C}^r$-mnogoterosti, tako da je π lokalni $\mathscr{C}^r$-difeomorfizem.*

Dokaz Naj bo $\mathscr{V} = \{(V_j, \psi_j)\}$ $\mathscr{C}^r$-atlas na Y. Naj bo $U \subset X$ dovolj majhna odprta množica, tako da je $\pi|_U : U \to \pi(U) \subset Y$ homeomorfizem in je $\pi(U) \subset V_j$ za nek j. Kompozicija $\psi_j \circ \pi\colon U \to \mathbb{R}^n$ je tedaj homeomorfizem na odprto podmnožico $(\psi_j \circ \pi)(U) \subset \mathbb{R}^n$. Par $(U, \psi_j \circ \pi)$ vzamemo za lokalno karto na X. Prostor X lahko pokrijemo s takimi kartami in dobimo atlas $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ na X. Prehodna preslikava med kartama ϕ_i in ϕ_j je enaka

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} = (\psi_i \circ \pi) \circ (\psi_j \circ \pi)^{-1} = \psi_i \circ \pi \circ (\pi|_{U_j})^{-1} \circ \psi_j^{-1} = \psi_i \circ \psi_j^{-1}.$$

Torej dobimo iste prehodne preslikave kot v atlasu $\mathscr{V}$, zato je $\mathscr{U}$ $\mathscr{C}^r$-atlas. $\square$

Oglejmo si preslikavo $\pi|_{U_i}\colon U_i \to Y$ v paru lokalnih kart $(U_i, \psi_i \circ \pi)$ na X in (V_i, ψ_i) na Y:

$$\tilde{\pi} = \psi_i \circ \pi \circ (\psi_i \circ \pi)^{-1} = \psi_i \circ \pi \circ (\pi|_{U_i})^{-1} \circ \psi_i^{-1} = \mathrm{Id}$$

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi_i=\psi_i\circ\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_i \arrow[d, "\psi_i"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{\pi}=\mathrm{Id}"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Vidimo torej, da je v tem paru kart projekcija π podana z identično preslikavo.

Oglejmo si sedaj obratni problem. Naj bo $\pi\colon X \to Y$ lokalni homeomorfizem. Predpostavimo, da sta X in Y 2-števna Hausdorffova prostora in da je π surjektivna. Recimo, da je X opremljena s strukturo $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti. Vprašanje je, kdaj obstaja $\mathscr{C}^r$-struktura na Y, tako da je π lokalni $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem.

Recimo, da za neko točko $y \in Y$ obstajata dve točki $x_1 \neq x_2 \in X$, tako da velja $\pi(x_1) = \pi(x_2) = y$. Ker je π lokalni homeomorfizem, obstajajo okolice $x_1 \in U_1 \subset X$, $x_2 \in U_2 \subset X$ in $y \in V \subset Y$, da je $\pi|_{U_j}\colon U_j \to V$ homeomorfizem za $j = 1,2$. Če sta U_1, U_2 dovolj majhni, potem obstajata $\mathscr{C}^r$ lokalni karti $\phi_j\colon U_j \xrightarrow{\cong} U_j' \subset \mathbb{R}^n$ za $j = 1,2$. Sedaj dobimo dve lokalni karti na Y:

$$(V, \underbrace{\phi_j \circ (\pi|_{U_j})^{-1}}_{\psi_j}) \quad \text{za } j = 1,2.$$

Oglejmo si prehodno preslikavo:

$$\begin{aligned} \psi_2 \circ \psi_1^{-1} &= \phi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \circ (\phi_1 \circ (\pi|_{U_1})^{-1}) = \phi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \pi|_{U_1} \circ \phi_1^{-1} \\ &= \phi_2 \circ \underbrace{((\pi|_{U_2})^{-1} \circ \pi|_{U_1})}_{U_1 \xrightarrow{\cong} U_2} \circ \phi_1^{-1}. \end{aligned}$$

Če bi vedeli, da je $\pi_{12} \stackrel{def}{=} (\pi|_{U_2})^{-1} \circ \pi|_{U_1}$ difeomorfizem (v dani $\mathscr{C}^r$-strukturi na X), lahko zaključimo, da sta karti (V, ψ_1) in (V, ψ_2) na Y $\mathscr{C}^r$ kompatibilni.

Poiskali bomo naravne pogoje na projekcijo π, pri katerih je zgornji pogoj izpolnjen.

Definicija 1.68 (Krovna projekcija) *Zvezna surjektivna preslikava* $\pi\colon X \to Y$ *topoloških prostorov se imenuje* krovna projekcija*, če ima vsaka točka* $y \in Y$ *odprto okolico* $V \subset Y$*, katere praslika* $\pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ *je disjunktna unija odprtih podmnožic* $U_\alpha \subset X$*, tako da je za vsak* $\alpha \in A$ *zožitev*

$$\pi|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \xrightarrow{\cong} V$$

homeomorfizem množice U_α *na množico* V*. Tako trojico* (X, Y, π) *imenujemo* krov*. Prostor* X *je* totalni prostor*,* Y *pa je* bazni prostor *krova. Če je totalni prostor* X

povezan in enostavno povezan, potem se (X,Y,π) *imenuje* univerzalni krov *nad* Y *in* $\pi\colon X\to Y$ *je* univerzalna krovna projekcija.

Krov je isto kot sveženj z diskretno topologijo na vlaknu $A\cong\pi^{-1}(y)$. O svežnjih s splošnejšimi (nediskretnimi) vlakni bomo govorili v naslednjem razdelku.

Naloga 1.69 *Dokaži: Če je* X *kompakten in je* $\pi\colon X\to Y$ *surjektiven lokalen homeomorfizem, potem je* π *končnolistni krov (to je, krov s končnim vlaknom).*

Definicija 1.70 *Naj bo* $\pi\colon X\to Y$ *krov. Homeomorfizem* $f\colon X\to X$*, ki zadošča pogoju* $\pi\circ f=\pi$*, se imenuje* krovna translacija *ali* avtomorfizem krova.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{1.16}$$

Krova $\pi\colon X\to Y$ *in* $\pi'\colon X'\to Y$ *nad isto bazo* Y *sta* izomorfna*, če obstaja homeomorfizem* $f\colon X\to X'$*, tako da komutira diagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{1.17}$$

Tak homeomorfizem f *se imenuje izomorfizem prvega krva v drugi krov.*

Pogoj $\pi\circ f=\pi$ v (1.16) pomeni, da za vsako točko $x\in X$ leži njena slika $f(x)$ na istem vlaknu preslikave π. Iz definicij sledi, da je krovna translacija na vsaki odprti množici $U_\alpha\subset X$ kot v definiciji 1.68 oblike

$$f|_{U_\alpha}=(\pi|_{U_\beta})^{-1}\circ\pi|_{U_\alpha}\colon U_\alpha\to U_\beta.$$

Odtod vidimo, da je f istega razreda gladkosti kot krovna projekcija π. Podobno vidimo, da je izmorfizem krovov istega razreda gladkosti kot oba dana krova.

Množica $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ vseh krovnih translacij krova π je očitno grupa za kompozicijo, torej je podgrupa grupe vseh homeomorfizmov totalnega prostora X.

Naloga 1.71 *Naj bo prostor* X *povezan. Če je* $f\in\mathrm{Deck}_\pi(X)$ *in* $f(x_0)=x_0$ *za neko točko* $x_0\in X$*, sledi* $f=\mathrm{Id}_X$*. (Navodilo: množica* $\{x\in X : f(x)=x\}$ *je odprta in zaprta v* X*.) Analogno, izomorfizem povezanih krovov* (1.17) *jej natanko določen z vrednostjo v poljubni točki* $x_0\in X$*.*

Definicija 1.72 *Krov* $\pi\colon X\to Y$ *se imenuje* regularen*, če grupa* $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ *krovnih translacij deluje tranzitivno na vsakem vlaknu, to je, poljubni dve točki na istem vlaknu* $\pi^{-1}(y)$ *lahko preslikamo eno v drugo s krovno translacijo.*

Če je $\pi\colon X \to Y$ regularen krov, potem je očitno

$$Y \cong X/\mathrm{Deck}_\pi(X) = X/\sim,$$

kjer je relacija $\sim$ definirana s pogojem

$$x \sim x' \iff \exists \sigma \in \mathrm{Deck}_\pi(X),\ \sigma(x) = x'.$$

Kvocient Y se v takem primeru imenuje *prostor orbit* grupe $\mathrm{Deck}_\pi(X)$. Ker je vsaka krovna translacija natanko določena z vrednostjo v eni točki, je vlakno $\pi^{-1}(y)$ nad poljubno točko $y \in Y$ izomorfno grupi $\mathrm{Deck}_\pi(X)$.

Primer 1.73 Ogledali si bomo nekaj osnovnih primerov krovnih projekcij.

(a) $X = \mathbb{R}$, $\sigma(x) = x+1$, $\mathbb{R}/\langle\sigma\rangle = \mathbb{S}^1$ je krožnica. Kvocientna preslikava $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\langle\sigma\rangle$ priredi realnemu številu x njegov ulomljeni del $x - [x] \in [0,1)$, kjer je $[x] \in \mathbb{Z}$ celi del števila x, to je največje celo število $[x] \le x$. Lahko je videti, da je to krovna projekcija s krovno grupo $\mathrm{Deck}_p(\mathbb{R}) = \langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}$. Če kvocient prestavimo kot enotno krožnico $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, potem je preslikava

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \qquad p(x) = e^{2\pi \mathrm{i} x},$$

univerzalna krovna projekcija.

(b) Nadomestimo $\mathbb{R}$ s $\mathbb{C}$ in opazujmo $\sigma(z) = z+1$ kot translacijo na $\mathbb{C}$. Sedaj je kvocient $\mathbb{C}/\langle\sigma\rangle$ izomorfen $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ in univerzalna krovna projekcija je $\mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{C}^*$, $p(z) = e^{2\pi i z}$. Tako kot prej je $\mathrm{Deck}_p(\mathbb{C}) = \langle\sigma\rangle = \mathbb{Z}$.

(c) Naj bo $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ kot v točki (a). Za vsak $k \in \mathbb{N}$ preslikava $\mathbb{R} \ni x \xmapsto{f_k} kx \in \mathbb{R}$ inducira k-listno krovno projekcijo $g_k\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, tako da komutira diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, "g_k"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Če $\mathbb{S}^1$ predstavimo z enotno krožnico $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ kot v točki (a), je g_k podana s preslikavo $e^{\mathrm{i}\theta} \mapsto e^{k\mathrm{i}\theta}$, to je zožitev k-te potence $\mathbb{C} \in z \mapsto z^k \in \mathbb{C}$ na krožnico. Vlakno $g_k^{-1}(w) = \{z_1, \dots, z_k\}$ so k-ti koreni števila w:

$$w = e^{i\theta} \implies z_j = e^{\frac{i\theta}{k} + j\frac{2\pi i}{k}}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Grupa krovnih translacij krova $g_k\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ je generirana z rotacijo

$$\mathbb{S}^1 \ni e^{\mathrm{i}\theta} \xmapsto{\sigma} e^{\mathrm{i}\theta + 2\pi\mathrm{i}/k} \in \mathbb{S}^1$$

za kot $\frac{2\pi}{k}$. Torej je $\mathrm{Deck}_{g_k}(\mathbb{S}^1) = \langle\sigma\rangle = \mathbb{Z}_k := \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

(d) Preslikava $\mathbb{C}^* \ni z \stackrel{g_k}{\longmapsto} z^k \ni \mathbb{C}^*$ je krovna preslikava s podobnimi lastnostmi kot njena zožitev na krožnico v točki (c). Univerzalni krov $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^*$ je podan s preslikavo $z \mapsto e^{2\pi i z}$.

(e) $X = \mathbb{R}^2$. Naj bo $\Gamma = \langle \sigma, \tau \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ prosta abelova grupa, generirana s translacijama $\sigma(x,y) = (x+1,y)$ in $\tau(x,y) = (x,y+1)$. Kvocient (prostor orbit) je v tem primeru 2-dimenzionalni torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$.

Sedaj si oglejmo obraten problem. Najprej si moramo ogledati pojem delovanja grupe na mnogoterosti. Označimo z $\mathrm{Diff}^r(X)$ množico vseh $\mathscr{C}^r$ difeomorfizmov neke $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti X; to je očitno grupa za kompozicijo.

Definicija 1.74 *Naj bo X $\mathscr{C}^r$-mnogoterost in Γ neka abstraktna grupa z enoto $1 \in \Gamma$. Grupa Γ deluje kot grupa $\mathscr{C}^r$ difeomorfizmov na X, če je vsakemu elementu $g \in \Gamma$ prirejen nek difeomorfizem $\theta_g \in \mathrm{Diff}^r(X)$, tako da velja*

$$\theta_1 = \mathrm{Id}_X, \quad \theta_{gg'} = \theta_g \circ \theta_{g'} \ \ (g, g' \in \Gamma), \quad \theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1} \ \ (g \in \Gamma).$$

Ekvivalentno,

$$\Gamma \ni g \longmapsto \theta_g \in \mathrm{Diff}^r(X) \ \ \textit{je homomorfizem grup.} \tag{1.18}$$

Grupa Γ deluje zvesto *na X, če je homomorfizem* (1.18) *injektiven, torej $\theta_g \neq \mathrm{Id}_X$ za vsak $g \in \Gamma \setminus \{1\}$.*

Tako delovanje grupe Γ na X se imenuje *levo delovanje*. *Desno delovanje* definiramo s pogojem $\theta_{gg'} = \theta_{g'} \circ \theta_g$. Omejili se bomo na leva delovanja.

Če je delovanje zvesto, lahko grupni element $g \in \Gamma$ identificiramo s prirejenim difeomorfizmom $\theta_g \in \mathrm{Diff}^r(X)$; s tem identificiramo Γ z ustrezno podgrupo v $\mathrm{Diff}^r(X)$. V tem primeru bomo pogosto pisali

$$\theta_g(x) = g \cdot x, \qquad x \in X, \ g \in \Gamma.$$

Brez izgube splošnosti se omejimo na zvesta delovanja.

Orbita točke $x \in X$ glede na dano grupo $\Gamma \subset \mathrm{Diff}^r(X)$ je množica

$$\Gamma x = \{g \cdot x : g \in \Gamma\} \subset X.$$

Relacija

$$x \sim y \stackrel{def}{\iff} \big(\exists g \in \Gamma, \text{ tako da } g \cdot x = y\big) \iff \Gamma x = \Gamma y$$

je ekvivalenčna relacija na X, torej je X unija paroma disjunktnih orbit. Kvocientni prostor X/Γ se imenuje *prostor orbit*.

Primer 1.75 *Naj bo X* Liejeva grupa*, to je grupa s strukturo gladke mnogoterosti, v kateri sta grupni operaciji produkt in inverz gladki preslikavi. Primeri so npr. $GL_n(\mathbb{R})$, to je grupa vseh obrnljivih $n \times n$ matrik, oz. v kompleksnem primeru*

$GL_n(\mathbb{C})$, ter njune podgrupe. Če je $\Gamma \subset X$ podgrupa grupe X, potem Γ naravno deluje na X s produktom na levi. Prostor orbit $Y = X/\Gamma$ ima strukturo grupe, če je $\Gamma \subset X$ grupa edinka, to je, $x\Gamma x^{-1} = \Gamma$ za vsak $x \in \Gamma$. Če je $\pi \colon X \to Y$ krovna projekcija, je $\Gamma = \mathrm{Deck}_\pi(X)$ ravno grupa krovnih translacij.

Zanima nas, pri kakšnih pogojih na delovanje grupe Γ na X je prostor orbit $Y = X/\Gamma$ Hausdorffov in kdaj je kvocientna projekcija $\pi \colon X \to Y$ krovna projekcija.

Definicija 1.76 *Naj bo X $\mathscr{C}^r$-mnogoterost in $\Gamma \subset \mathrm{Diff}^r(X)$ grupa $\mathscr{C}^r$-difeomorfizmov. Grupa Γ deluje na X* povsem nezvezno *ali* diskretno*, če velja:*

1. *Vsaka točka $x \in X$ ima odprto okolico $U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \varnothing$ razen za neko končno množico elementov $g \in \Gamma$. (Tu je $gU = \{g \cdot x : x \in U\}$.)*
2. *Za vsak par točk $x, x' \in X$, ki nista na isti orbiti ($\Gamma x \neq \Gamma y$), obstajata odprti okolici $x \in U \subset X$, $x' \in U' \subset X$, tako da je $gU \cap U' = \varnothing$ za vse $g \in \Gamma$. (Ekvivalentno, $gU \cap g'U' = \varnothing$ za vsak par $g, g' \in \Gamma$.)*

Če velja

3. *$g \cdot x \neq x$ za vsak $x \in X$ in $g \in \Gamma \setminus \{1\}$,*

potem pravimo, da je delovanje grupe Γ na X brez negibnih točk.

Očitno je delovanje končne grupe vselej povsem nezvezno.

Točka $x \in X$, za katero je $g \cdot x = x$ za vsak $g \in \Gamma$, se imenuje *negibna točka* ali tudi *fiksna točka* difeomorfizma g. Množica

$$\Gamma_x = \{g \in \Gamma : g \cdot x = x\}$$

je podgrupa grupe Γ, ki se imenuje *izotropna grupa* točke x. Iz pogoja 1. v definiciji 1.76 sledi, da je grupa Γ_x končna. V obratni smeri velja naslednje.

Trditev 1.77 *Če deluje Γ povsem nezvezno na X, potem za vsako točko $x \in X$ obstaja odprta okolica $x \in U \subset X$, tako da velja*

$$gU \cap U \neq \varnothing \iff g \in \Gamma_x.$$

Dokaz Implikacija $\Leftarrow$ očitno velja va vsako okolico U točke x. Dokažimo sedaj implikacijo $\Rightarrow$. Recimo, da za neko okolico $x \in U \subset X$ elementi $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_k \in \Gamma$ zadoščajo pogoju $g_j(U) \cap U \neq \varnothing$, za vse ostale elemente $g \in \Gamma \setminus \{g_1, \ldots, g_k\}$ pa velja $g(U) \cap U = \varnothing$. Če U zmanjšamo, se množica $\{g_1, \ldots, g_k\}$ kvečjemu zmanjša. Torej lahko izberemo U tako, da za vsako manjšo okolico $x \in U' \subset U$ dobimo isto kolekcijo elementov $g_1, \ldots, g_k \in \Gamma$, ki zadoščajo pogoju $g_j(U') \cap U' \neq \varnothing$. Trdimo, da ti elementi sestavljajo izotropno grupo Γ_x. Izberemo zaporedje vloženih okolic $U' = U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots \supset \bigcap_l U_l = \{x\}$. Za vsak $l \in \mathbb{N}$ in $j \in \{1, \ldots, k\}$ je $g_j(U_l) \cap U_l \neq \varnothing$, torej obstaja točka $x_{j,l} \in U_l$, da je $g_j(x_{j,l}) \in U_l$. Pri $l \to \infty$ velja $x_{j,l} \to x$ in $g_j(x_{j,l}) \to x$, saj se okolice U_l krčijo proti x. Iz zveznosti preslikave g_j sledi $g_j(x) = x$, torej $g_j \in \Gamma_x$ za $j = 1, \ldots, k$. $\square$

Posledica 1.78 *Če Γ deluje na X povsem nezvezno in brez negibnih točk, ima vsaka točka $x \in X$ okolico $U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \varnothing$ za vsak $g \in \Gamma \setminus \{1\}$.*

Naloga 1.79 *Dokaži: Če Γ deluje povsem nezvezno, potem je vsaka orbita $\Gamma x = \{g\cdot x\colon\ g \in \Gamma\} \subset X$ zaprta diskretna podmnožica v X.*

Vprašanje: Recimo, da Γ deluje na X tako, da so vse njene orbite Γx diskretne v X in je vsaka izotropna grupa Γ_x končna. Ali odtod sledi pogoj 1. v definiciji povsem nezveznega delovanja?

Primer 1.80

1. Ciklična grupa $\mathbb{Z}_k = \{0,1,\dots,k-1\}$ deluje na $\mathbb{C}$ z generatorjem
$$\sigma(z) = e^{2\pi i/k} z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$
To je ravno rotacija ravnine za k-ti koren enote. Pripadajoča kvocientna projecija je $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = z^k$. Torej je $\mathbb{C}/\langle\sigma\rangle \cong \mathbb{C}$. Orbita točke z je
$$\{e^{2m\pi i/k} z : m = 0,1,\dots,k-1\}.$$
Edina negibna točka grupe je $0 \in \mathbb{C}$. Na $\mathbb{C}^*$ deluje grupa $\Gamma = \langle\sigma\rangle$ povsem nezvezno in brez negibnih točk; $\mathbb{C}^* \ni z \to z^k \in \mathbb{C}^*$ je krovna projekcija.
2. $X = \mathbb{C}^2$, delovanje ciklične grupe $\mathbb{Z}_2$ z generatorjem $\sigma(z,w) = (-z,-w)$. Orbita točke (z,w) vsebuje še njej antipodno točko $(-z,-w)$. Negibna točka je izhodišče. Orbite dane grupe so ravno vlakna preslikave
$$f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad f(z,w) = (z^2, w^2, zw).$$
Torej je slika $f(\mathbb{C}^2) \subset \mathbb{C}^3$ ravno prostor orbit $\mathbb{C}^2/\Gamma$. Očitno je
$$f(\mathbb{C}^2) = \{(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \in \mathbb{C}^3 : \zeta_3^2 = \zeta_1\zeta_2\}.$$
To je kvadratična hiperploskev v $\mathbb{C}^3$ s singularnostjo v izhodišču $(0,0,0)$.
3. $X = \mathbb{R}^2$, delovanje ciklične grupe $\mathbb{Z}_2$ z generatorjem $\sigma(x,y) = (-x,y)$ (zrcaljenje preko y osi). Kvocient $\mathbb{R}^2/\Gamma = [0,\infty) \times \mathbb{R}$ je mnogoterost z robom. Vse točke $(0,y)$ $(y \in \mathbb{R})$ so negibne točke.
4. $X = \mathbb{C}^2_* = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, $\sigma(z) = 2z$. Grupa $\Gamma = \langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}$ deluje na $\mathbb{C}^2_*$ povsem nezvezno in brez negibnih točk. Prostor orbit $Y = \mathbb{C}^2_*/\Gamma$ je kompleksna ploskev, ki se imenuje *Hopfova ploskev*. Fundamentalna domena delovanja je npr. sferična lupina $A = \{z \in \mathbb{C}^2 : 1 \le |z| \le 2\}$. Identificirata se njeni robni komponenti, to je enotna sfera $\mathbb{S}^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1\}$ in $2\mathbb{S}^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z| = 2\}$, tako da je kvocient difeomorfen produktu $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$.

Naloga 1.81 *Recimo, da sta X, Y $\mathscr{C}^r$-mnogoterosti in je $\pi : X \to Y$ krovna projekcija razreda $\mathscr{C}^r$. Pokaži, da grupa krovnih translacij $\mathrm{Deck}_\pi(X) \subset \mathrm{Diff}^r(X)$ deluje na X povsem nezvezno ter brez negibnih točk.*

V splošnem grupa $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ ne deluje tranzitivno na vlaknih krovne projekcije $\pi\colon X \to Y$. Če $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ deluje tranzitivno na vlaknih, se krov imenuje *regularen*. V tem primeru sledi, da je Y izomorfna prostoru orbit: $Y = X/\mathrm{Deck}_\pi(X)$.

Izrek 1.82 *Naj bo X $\mathscr{C}^r$-mnogoterost ($r \in \{0,1,\dots,\infty,\omega,\mathscr{O}\}$). Če grupa Γ deluje na X povsem nezvezno, je kvocientna projekcija $\pi : X \to Y = X/\Gamma$ odprta preslikava in kvocientna topologija na Y je Hausdorffova. Če je poleg tega delovanje brez negibnih točk, ima Y strukturo $\mathscr{C}^r$-mnogoterosti, tako da je $X \xrightarrow{\pi} Y$ krovna projekcija razreda $\mathscr{C}^r$ in je $\Gamma = \mathrm{Deck}_\pi(X)$ grupa njenih krovnih translacij.*

Dokaz Če je U odprta množica v X, je tudi $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g\in\Gamma} gU$ odprta množica, kar po definiciji kvocientne topologije pomeni, da je $\pi(U)$ odprta v Y. Torej je π odprta preslikava. Iz pogoja 2. v definiciji 1.76 sledi, da je kvocientna topologija na $Y = X/\Gamma$ Hausdorffova. Denimo sedaj, da Γ deluje brez negibnih točk. Po posledici 1.78 ima vsaka točka $x \in X$ odprto okolica $U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \varnothing$ za vsak $g \in \Gamma \setminus \{1\}$. Torej je $[U] = \pi(U) \subset Y$ okolica točke $\Gamma x = [x] \in Y$, za katero velja

$$\pi^{-1}([U]) = \bigsqcup_{g\in\Gamma} gU$$

in so množice gU paroma disjunktne. Projekcija $\pi\colon gU \to [U]$ je bijektivna, zvezna in odprta, torej homeomorfizem. Odtod sledi, da je Y lokalno evklidski prostor in je $\pi\colon X \to Y$ krovna projekcija. Ker je X 2-števen, je tak tudi Y.

$\mathscr{C}^r$-strukturo na Y definiramo na naslednji način. Naj bo $x \in X$. Izberimo odprto okolico $x \in U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \varnothing$ za vsak $g \in \Gamma \setminus \{1\}$. Okolico U po potrebi zmanjšamo, tako da obstaja lokalna karta $\phi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ (v danem maksimalnem $\mathscr{C}^r$ atlasu na X). Sedaj vzamemo preslikavo

$$\phi \circ (\pi|_U)^{-1} : \pi(U) \longrightarrow \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$$

za lokalno karto na Y. Če sta $\psi = \phi \circ (\pi|_U)^{-1}$ in $\psi' = \phi' \circ (\pi|_{gU})^{-1}$ (pri čemer je ϕ' lokalna karta na translatu gU) dve karti te oblike, je prehodna preslikava enaka

$$\psi' \circ \psi^{-1} = \phi' \circ (\pi|_{gU})^{-1} \circ (\phi \circ (\pi|_U)^{-1})^{-1} = \phi' \circ \underbrace{(\pi|_{gU})^{-1} \circ \pi|_U}_{\theta_g \in \mathrm{Diff}^r(X)} \circ \phi^{-1} \in \mathscr{C}^r.$$

S tem je izrek dokazan. □

Fundamentalna grupa. Naj bo $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ krožnica. Prelikava $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to Y$ se imenuje *zanka* v Y. Ekvivalentno, zanka je pot $\gamma\colon [0,1] \to Y$, pri kateri se začetna in končna točka ujemata: $\gamma(0) = \gamma(1)$. Opazujmo zanke v izbrani točki $y_0 \in Y$:

$$\gamma : \mathbb{S}^1 \to Y, \qquad \gamma(0) = \gamma(1) = y_0.$$

Zanki γ in γ' sta *homotopni*, če obstaja zvezna preslikava $H\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to Y$, ki zadošča pogojem

$$H(\cdot,0)=\gamma, \quad H(\cdot,1)=\gamma', \quad H(0,s)=H(1,s)=y_0 \ (\forall s\in[0,1]).$$

Obstoj homotopije je ekvivalenčna relacija na prostoru vseh zank v točki $y_0 \in Y$. *Homotopska grupa* $\pi_1(Y,y_0)$ je množica homotopnih razredov zank v Y, pripetih v točki $y_0 \in Y$. To je grupa (v splošnem nekomutativna) z operacijo stik poti:

$$[\gamma][\gamma']=[\gamma\cdot\gamma']$$

Stik $\gamma\cdot\gamma'$ dveh zank v točki y_0 je spet zanka v y_0, ki jo dobimo tako, da gremo najprej po prvi zanki γ in zatem še po drugi zanki γ'.

Naloga 1.83 *Preveri, da je homotopski razred stika zank $\gamma\cdot\gamma'$ odvisen le od homotopskih razredov obeh zank γ in γ'. Odtod sledi, da stik poti definira operacijo (produkt) v $\pi_1(Y,y_0)$. Opremljena s to operacijo se $\pi_1(Y,y_0)$ imenuje* fundamentalna grupa *(ali tudi* prva homotopska grupa*) prostora Y v točki y_0.*

Če je Y povezana, potem izbor bazne točke y_0 ni bistven, saj so grupe $\pi_1(Y,y_0)$ za različne $y_0\in Y$ med seboj izomorfne (niso pa naravno izomorfne). V tem primeru pogosto pišemo kar $\pi_1(Y)$. Izomorfizem $\pi_1(Y,y_0)\xrightarrow{\cong}\pi_1(Y,y_1)$ dobimo tako, da izberemo pot $\lambda\colon[0,1]\to Y$ z začetno točko $\lambda(0)=y_0$ in končno točko $\lambda(1)=y_1$. Označimo z λ^{-1} obrnjeno pot $\lambda^{-1}(t)=\gamma(1-t)$; očitno je $\lambda^{-1}(0)=y_1$ in $\lambda^{-1}(1)=y_0$. Zanki $\gamma\colon\mathbb{S}^1\to Y$ v y_0 tedaj priredimo zanko $\gamma'=\lambda^{-1}\cdot\gamma\cdot\lambda$ v y_1 (to je stik poti λ^{-1} of y_1 do y_0, zanke γ v y_0 ter poti λ nazaj od y_0 do y_1). Ni težko videti, da ta operacija inducira izomorfizem $\pi_1(Y,y_0)\xrightarrow{\cong}\pi_1(Y,y_1)$, ki pa je v splošnem odvisen od izbire poti λ. Natančneje, izomorfizem je odvisen od homotopskega razreda poti od y_0 do y_1.

Primer 1.84 $\pi_1(\mathbb{S}^1)=\mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{C}^*)=\mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

Povezana mnogoterost Y se imenuje *enostavno povezana*, če je njena fundamentalna grupa trivialna: $\pi_1(Y)=0$. (Včasih pišemo grupno operacijo multiplikativno in trvialno grupo označimo z $\pi_1(Y)=1$.)

Primer 1.85 $\pi_1(\mathbb{R}^n)=0$ za vsak $n\geq 1$; $\pi_1(\mathbb{S}^n)=0$ za vsak $n>1$.

Vsaka zvezna preslikava $f\colon X\to Y$ inducira homomorfizem fundamentalnih grup

$$f_*\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f(x_0)), \quad [\gamma]\mapsto[f\circ\gamma]. \tag{1.19}$$

Slika $f_*(\pi_1(X,x_0)$ je podgrupa v $\pi_1(Y,f(x_0))$.

Pomemben rezultat v teoriji krovnih prostorov je naslednji izrek o dvigu homotopij. Naj bosta X in Z topološka prostora. Zvezna preslikava $f\colon Z\times[0,1]\to X$ se imenuje *homotopija preslikav* $Z\to X$; to je družina zveznih preslikav $f_t=f(\cdot,t)\colon Z\to X$, ki je zvezno odvisna od parametra $t\in[0,1]$.

Izrek 1.86 (Dvig homotopije v krovu) *Naj bo $\pi\colon X\to Y$ krovna projekcija. Naj bo Z topološki prostor in $f\colon Z\times[0,1]\to Y$ ter $F_0\colon Z\to X$ zvezni preslikavi, tako da velja $\pi\circ F_0=f_0:=f(\cdot,0)$. Potem obstaja natanko ena zvezna preslikava $F:Z\times[0,1]\to Y$, tako da velja*

$$\pi\circ F=f,\qquad F(\cdot,0)=F_0:Z\to Y.$$

Preslikava F v izreku se imenuje *dvig* preslikave f glede na krovno projekcijo π. V posebnem primeru, ko je Z prostor z eno točko, dobimo izrek od dvigu poti:

Posledica 1.87 (Dvig poti v krovu) *Naj bo $\pi\colon X\to Y$ krovna projekcija. Če je $f\colon[0,1]\to Y$ pot in $x_0\in X$ točka v vlaknu $\pi^{-1}(f(0))\in X$, potem obstaja natanko ena pot $F\colon[0,1]\to X$, ki zadošča pogojema*

$$F(0)=x_0,\qquad \pi(F(t))=f(t)\ \text{ za vsak } t\in[0,1].$$

Dokaz izreka 1.86 Oglejmo si najprej poseben primer iz posledice 1.87, ko je $Z=\{z_0\}$ prostor z eno točko, torej je $f\colon[0,1]\to Y$ pot v Y. Ker je zaloga vrednosti $f([0,1])\subset Y$ kompaktna, lahko izberemo delitev $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k=1$ in odprte povezane množice $V_1,\ldots,V_k\subset Y$, ki zadoščajo pogoju v definiciji 1.68 in

$$f([t_{i-1},t_i])\subset V_i,\qquad i=1,\ldots,k. \tag{1.20}$$

Naj bo $U_1\subset X$ tista povezana komponenta množice $\pi^{-1}(V_1)$, ki vsebuje točko x_0. Tedaj je $\pi|_{U_1}:U_1\to V_1$ homeomorfizem. Definirajmo

$$F(t)=(\pi|_{U_1})^{-1}(f(t)),\qquad t\in[0,t_1].$$

Potem očitno velja $F(0)=x_0$ in $\pi(F(t))=f(t)$ za $t\in[0,t_1]$. Naj bo U_2 povezana komponenta množice $\pi^{-1}(V_2)$, ki vsebuje točko $F(t_1)$. Definiramo

$$F(t)=(\pi|_{U_2})^{-1}(f(t)),\qquad t\in[t_1,t_2].$$

Tedaj se $F(t_1)$ ujema s prej definirano vrednostjo in je $\pi(F(t))=f(t)$ za $t\in[t_1,t_2]$. Po k korakih dobimo iskani dvig F poti f na celotnem intervalu $[0,1]$. Enoličnost dviga je očitna iz konstrukcije, sledi pa tudi iz dejstva, da je množica točk $t\in[0,1]$, v kateri se dva dviga iste preslikave ujemata, odprta in zaprta.

V splošnem primeru opisani postopek zagotovi za vsako točko $z_0\in Z$ enolični dvig poti $f(z_0,\cdot):I\to Y$ v pot $F(z_0,\cdot):[0,1]\to X$ z začetno točko $F_0(z_0)\in X$. Potrebno je videti, da je pot $F(z_0,\cdot)$ zvezno odvisna od točke $z_0\in Z$. Fiksirajmo z_0 in izberimo delitev $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k=1$ intervala $[0,1]$ in odprte množice $V_1,\ldots,V_k\subset Y$, ki zadoščajo pogoju v definiciji 1.68 in pogoju (1.20) za pot $f=f(z_0,\cdot)\colon I\to Y$. Zaradi zveznosti preslikave f velja (1.20) tudi za pot $f(z,\cdot)$ za vse točke $z\in Z$ v neki dovolj majhni okolici $Z_0\subset Z$ točke z_0. Ker je tudi $F_0\colon Z\to X$ zvezna preslikava, lahko okolico Z_0 primerno zmanjšamo, tako da vse točke $F_z(0)$ $(z\in Z_0)$ ležijo v isti povezani komponenti $U_1\subset X$ množice $\pi^{-1}(V_1)$. Zato lahko

definiramo dvig na intervalu $t \in [0,t_1]$ za vse točke $z \in Z_0$ s predpisom

$$F(z,t) = (\pi|_{U_1})^{-1}(f(z,t)), \qquad t \in [0,t_1],\ z \in Z_0.$$

Z istim postopkom nadaljujemo enako kot zgoraj, s tem da okolico Z_0 točke z_0 v vsakem koraku po potrebi skrčimo. V končno mnogo korakih dobimo zvezen dvig $F : Z_0 \times [0,1] \to X$ preslikave $f : Z_0 \times [0,1] \to X$. Ker to velja za vsako točko $z_0 \in Z$, je izrek dokazan. □

Posledica 1.88 (Izrek o monodromiji) *Naj bo $\pi\colon X \to Y$ krovna projekcija, $y_0, y_1 \in Y$ poljubni točki in $f_s\colon I = [0,1] \to Y$ $(s \in I)$ zvezna družina (homotopija) poti z začetno točko $f_s(0) = y_0$ in končno točko $f_s(1) = y_1$ za vsak $s \in I$. Naj bo $F_s\colon I \to X$ zvezen dvig poti f_s, ki je zvezno odvisen od $s \in I$. Potem sta točki $F_s(0)$ in $F_s(1)$ neodvisni od $s \in I$. V posebnem, če je $\{f_s\}_{s\in I}$ homotopija zank v točki y_0 in je F_0 zanka v neki točki $x_0 \in X$ nad y_0, potem je $\{F_s\}_{s\in I}$ homotopija zank v x_0.*

Dokaz Preslikava $I \ni s \mapsto F_s(0) \in X$ je zvezna in njena zaloga vrednosti leži v diskretnem vlaknu $\pi^{-1}(y_0)$, zato je konstantna. Isti sklep velja za preslikavo $I \ni s \mapsto F_s(1) \in \pi^{-1}(y_1) \subset X$. □

Izrek 1.89 (Dvig enostavno povezane množice) *Naj bo $\pi\colon X \to Y$ krovna projekcija in Z povezana in enostavno povezana mnogoterost. Za vsako zvezno preslikavo $f\colon Z \to Y$ obstaja zvezna preslikava $F\colon Z \to X$, ki zadošča $\pi \circ F = f$. Dvig F je enolično določen z vrednostjo $F(z_0) \in X$ v poljubni točki $z_0 \in Z$.*

Dokaz Izberimo točko $z_0 \in Z$, označimo $y_0 = f(z_0) \in Y$ in naj bo $x_0 \in X$ točka na vlaknu $\pi^{-1}(y_0)$. Za poljubno točko $z \in Z$ izberemo pot $\gamma\colon I = [0,1] \to Z$ z $\gamma(0) = z_0$ in $\gamma(1) = z$. Njena slika $f \circ \gamma\colon I \to Y$ je pot v Y z začetno točko $y_0 \in Y$ in končno točko $f(z) \in Y$. Po posledici 1.87 obstaja dvig $\lambda : I \to X$ z začetno točko $\lambda(0) = x_0$. Definiramo $F(z) = \lambda(1) \in X$. Če dokažemo, da je točka $\lambda(1)$ neodvisna od izbire poti γ, potem je F dobro definirana in zadošča izreku.

Ker je prostor Z enostavno povezan, sta poljubni dve poti $\gamma, \gamma' : I \to Z$ med točkama z_0 in z homotopni, torej obstaja homotopija poti $\gamma_s\colon I \to Z$ z $\gamma_0 = \gamma$ in $\gamma_1 = \gamma'$. Za vsak $s \in I$ naj bo $\lambda_s\colon I \to X$ dvig poti $f \circ \gamma_s\colon I \to Y$ z začetno točko $\lambda_s(0) = x_0$ (glej posledico 1.87). Po posledici 1.88 je končna točka $\lambda_s(1) \in X$ neodvisna od $s \in I$. Zato je zgoraj definirana preslikava $F : Z \to X$ neodvisna od izbire poti γ. □

Zveza med krovi nad Y ter podgrupami fundamentalne grupe $\pi_1(Y)$.

Trditev 1.90 *Če je $f\colon X \to Y$ krovna preslikava, potem je za vsako točko $x_0 \in X$ homomorfizem fundamentalnih grup $f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ injektiven.*

Dokaz Naj bo $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to X$ zanka v točki $x_0 \in X$, tako da je $[f \circ \gamma] = 0 \in \pi(Y, y_0)$, kjer je $y_0 = f(x_0)$. To pomeni, obstaja homotopija $H_s\colon \mathbb{S}^1 \to Y$ $(s \in I)$ zank v y_0, tako da je $H_0 = f \circ \gamma$ in je $H_1 \equiv y_0$ konstantna zanka. Po posledici 1.88 se H_s dvigne v homotopijo zank $G_s\colon \mathbb{S}^1 \to X$ $(s \in I)$ v točki $x_0 \in X$, tako da je $G_0 = \gamma$. Ker je

$\pi \circ G_1 = H_1$ konstantna zanka v y_0, leži zaloga vrednosti $G_1(I)$ v vlaknu $\pi^{-1}(y_0)$. Ker je slednje diskretno, je G_1 konstantna zanka v x_0. Torej je G_s homotopija zanke γ v konstantno zanko $I \ni t \mapsto x_0$ in je zato $[\gamma] = 0 \in \pi_1(X, x_0)$. $\square$

Izrek 1.91 *Če je Y povezana in enostavno povezana mnogoterost, potem je vsak krov $f\colon X \to Y$ trivialen, to je $X \cong Y \times E$, kjer je E (diskretno) vlakno.*

Dokaz Izberimo točke $y_0 \in Y_0$ in $x_0 \in \pi^{-1}(y_0) \in X$. Oglejmo si trikotnik preslikav

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Preslikava F je dvig identitete $Y \to Y$, ki zadošča $F(y_0) = x_0$; le-ta obstaja po izreku 1.89. Trivialno je videti, da je F homeomorfizem Y na povezano komponento prostora X, ki vsebuje točko x_0. To pomeni, da je $X \cong Y \times \pi^{-1}(y_0)$. $\square$

Naslednji izrek bomo navedli brez dokaza.

Izrek 1.92 *Naj bo Y povezana mnogoterost. Za vsako podgrupo $G \subset \pi_1(Y)$ obstaja krovni prostor $f\colon X \to Y$, tako da je totalni prostor X povezan in je $f_*(\pi_1(X)) = G$. Krov $f\colon X \to Y$ je regularen natanko tedaj, ko je G podgrupa edinka grupe $\pi_1(Y)$; v tem primeru je $\mathrm{Deck}_f(X) \cong \pi_1(Y)/G$.*

Ta izrek velja v vseh $\mathscr{C}^r$ kategorijah. Pomemben poseben primer dobimo za grupo $G = \{0\} \subset \pi_1(Y)$. Ker je homomorfizem $f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ injektiven, sledi $\pi_1(X) = 0$, torej je prostor X enostavno povezan in je $f\colon X \to Y$ univerzalni krov.

Izrek 1.92 igra pomembno vlogo pri klasifikaciji mnogoterosti, saj reducira problem na klasifikacijo enostavno povezanih mnogoterosti skupaj s prostim in povsem nezveznim delovanjem grup na njih.

Primer 1.93 Naj bo Y *Riemannova ploskev*, to je kompleksna mnogoterost $\dim_{\mathbb{C}} Y = 1$. Preprosti primeri so $\mathbb{C}$, domene v $\mathbb{C}$ in Riemannova sfera $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^2$. Naj bo $X \xrightarrow{\pi} Y$ njen univerzalni krov. Potem je X enostavno povezana Riemannova ploskev.

Izrek 1.94 (Riemann-Koebe) *Vsaka enostavno povezana Riemannova ploskev je biholomorfno ekvivalentna eni od ploskev $\mathbb{CP}^1$, $\mathbb{C}$, $\Delta = \{|z| < 1\}$. (Riemannov upodobitveni izrek: Vsaka povezana in enostavno povezana domena $D \subsetneq \mathbb{C}$ je biholomorfno ekvivalentna disku Δ.)*

Iz elementarne teorije funkcij ene kompleksne spremenljivke je znano, da so grupe holomorfnih avtomorfizmov teh treh ploskev naslednje:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\colon\ ad - bc \neq 0\} & \text{(ulomljene linearne funkcije)} \\ \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b\colon\ a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\} & \text{(kompleksna afina grupa)} \\ \mathrm{Aut}(\Delta) = \{z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\colon\ a \in \Delta, \theta \in \mathbb{R}\} & \text{(Möbiusove preslikave)} \end{array}$$

Sedaj je treba najti diskretne podgrupe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(X)$, $X \in \{\mathbb{CP}^1, \mathbb{C}, \Delta\}$, ki delujejo prosto in povsem nezvezno.

Ni težko preveriti, da ima vsak $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ negibno točko. Torej $\mathbb{CP}^1$ nima netrivialnih holomorfnih kvocientov.

Avtomorfize $\gamma(z) = az + b$ ravnine $\mathbb{C}$ je brez negibne točke natanko tedaj, ko je $a = 1$ in $b \neq 0$. Torej je γ translacija $z \overset{\gamma}{\mapsto} z + b$. Grupa translacij $\mathbb{Z} \cong \langle \gamma \rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ deluje na $\mathbb{C}$ brez negibnih točk in povsem nezvezno. Kvocientna projekcija $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}^*$ je podana s preslikavo $z \mapsto e^{2\pi i z/b}$.

Naj bosta $a, b \in \mathbb{C}^*$, $\frac{a}{b} \notin \mathbb{R}$. Pripadajoči translaciji sta

$$\gamma(z) = z + a, \qquad \sigma(z) = z + b$$

Grupa $\Gamma = \langle \gamma, \sigma \rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ generirana z γ in σ je izomorfna grupi $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Kvocient $\mathbb{C}/\Gamma$ je torus s kompleksno strukturo.

Brez izgube splošnosti lahko gledamo primer $a = 1$, $\omega = \frac{b}{a} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Tedaj je $\Gamma_\omega = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ in $\mathbb{C}/_{\Gamma_\omega} = \mathbb{T}_\omega$ je kompleksen torus, ki pripada številu ω. V mreži Γ_ω lahko vselej najdemo število $\omega' = u + iv$, tako da je $\Gamma_\omega = \Gamma_{\omega'}$ in velja

$$\left(|\omega'| > 1, \ -\frac{1}{2} < u \le \frac{1}{2} \right) \quad \text{ali} \quad \left(|\omega'| = 1, \ 0 \le u \le \frac{1}{2} \right). \tag{1.21}$$

Generator $\omega' \in \Gamma_\omega$ s temi lastnostmi je enolično določen in natanko določa kompleksno strukturo na torusu. Natančneje, če sta ω_1 in ω_2 kompleksni števili z lastnostmi (1.21), potem sta pripadajoča torusa $\mathbb{T}_{\omega_1} = \mathbb{C}/_{\Gamma_{\omega_1}}$ in $\mathbb{T}_{\omega_2} = \mathbb{C}/_{\Gamma_{\omega_2}}$ biholomorfno ekvivalentna natanko tedaj, ko je $\omega_1 = \omega_2$. Torej biholomorfno neekvivalentni kompleksni torusi sestavljajo kompleksno enoparametrično družino. (Za dokaz glej npr. Ahlfors [2].) Po drugi strani so vsi 2-torusi so med seboj difeomorfni.

Da se pokazati, da nobena grupa translacij ravnine $\mathbb{C}$ z več kot dvema generatorjema ne deluje povsem nezvezno. Odtod zaključimo, da so netrivialni holomorfni kvocienti ravnine $\mathbb{C}$ ravno $\mathbb{C}^*$ ter kompleksni torusi. Drugače povedano,če je Y enostavno povezana Riemannova ploskev, katere univerzalni krov je $\mathbb{C}$, potem je Y enaka eni od ploskev $\mathbb{C}, \mathbb{C}^*$ ali kompleksni torus.

Vse ostale Riemannove ploskve so holomorfni kvocienti diska $\Delta \subset \mathbb{C}$. Teh je veliko.

Naj bo S_g kompaktna orientabilna ploskev roda $g \in \mathbb{Z}_+$. Pri $g = 0$ je to 2-sfera, pri $g = 1$ imamo torus, za $g > 1$ pa je S_g povezana vsota g torusov. Taka ploskev ima do difeomorfizma natančno samo eno gladko strukturo. (To je, poljubni dve gladki strukturi na njej sta difeomorfni.)

Obstaja veliko grup $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$, ki delujejo na disku povsem nezvezno in prosto (brez fiksnih točk), tako da je kvocient Δ/Γ (ki je Riemannova ploskev) difeomorfen ploskvi S_g:

$$\begin{array}{c} \Delta \\ \big\downarrow \pi \\ \Delta/\Gamma \ \cong \ S_g \end{array}$$

Za različne grupe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$ lahko dobimo kvociente, ki so med seboj difeomorfni, niso pa biholomorfni.

Prostor modulov, imenovan tudi *Teichmüllerjev prostor*, je množica med seboj nebiholomorfnih kompleksnih struktur na dani ploskvi S_g. V primeru $g > 1$ lahko to množico predstavimo kot domeno v $\mathbb{C}^{3g-3}$, ki je homeomorfna krogli.

Več o uniformizacijski teoriji Riemannovih ploskev in o Teichmüllerjevih prostorih lahko najdete npr. v [8].

1.10 Svežnji

Naj bodo X,Y,Z mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ in naj bo $\pi\colon Z \to X$ submerzija razreda $\mathscr{C}^r$, tako da je vsako vlakno $Z_x = \pi^{-1}(x)$ $(x \in X)$ difeomorfno mnogoterosti Y. Taka preslikava se imenuje *svežen j z vlaknom* Y, če je projekcija π lokalno (nad majhnimi odprtimi množicami $U \subset X$) ekvivalentna projekciji $pr : U \times Y \to U$, $pr(x,y) = x$. Natančna definicija je naslednja.

Definicija 1.95 *Preslikava $\pi\colon Z \to X$ razreda $\mathscr{C}^r$ je $\mathscr{C}^r$* sveženj z vlaknom *Y, če ima vsaka točka $x_0 \in X$ odprto okolico $U \subset X$ in $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem*

$$\theta\colon Z|_U = \pi^{-1}(U) \to U \times Y, \tag{1.22}$$

tako da je $\theta(Z_x) = \{x\} \times Y$ za vsak $x \in U$. Ekvivalentno, naslednji diagram je komutativen:

$$\begin{array}{ccc} Z|_U & \xrightarrow{\theta} & U \times Y \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle pr} \\ U & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & U \end{array}$$

Mnogoterost X imenujemo bazni prostor, *Z je* totalni prostor *in Y je* vlakno *svežnja.*

Sveženj označujemo takole:

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & X \end{array}$$

Vsak difeomorfizem $\theta\colon Z|_U = \pi^{-1}(U) \to U \times Y$ kot v definiciji se imenuje *sveženjska karta* svežnja $\pi\colon Z \to X$. Družina sveženjskih kart $\mathscr{U} = \{(U_i, \theta_i)\}_{i \in I}$, kjer je $\bigcup_{i\in I} U_i = X$, je *sveženjski atlas*. Prehodna preslikava

$$\theta_{ij} = \theta_i \circ \theta_j^{-1} \colon U_{ij} \times Y \to U_{ij} \times Y$$

je oblike

$$\theta_{ij}(x,y) = \big(x, g_{ij}(x,y)\big), \quad x \in U_{ij},\ y \in Y, \tag{1.23}$$

kjer je za vsak $x \in U_{ij}$ preslikava $g_{ij}(x,\cdot) \in \mathrm{Diff}^r(Y)$ difeomorfizem vlakna Y.

Definicija 1.96 *Naj bosta $\pi\colon Z \to X$ in $\pi'\colon Z' \to X$ svežnja razreda $\mathscr{C}^r$. Preslikava $\Phi\colon Z \to Z'$ razreda $\mathscr{C}^r$, ki zadošča pogoju $\pi' \circ \Phi = \pi$, se imenuje $\mathscr{C}^r$* izomorfizem svežnjev.

Pogoj $\pi' \circ \Phi = \pi$ v definiciji pomeni, da komutira diagram

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\Phi} & Z' \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ X & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & X \end{array}$$

Torej Φ preslika vlakno $Z_x = \phi^{-1}(x)$ prvega svežnja difeomorfno na vlakno $Z'_x = (\phi')^{-1}(x)$ drugega svežnja za vsako točko $x \in X$.

Primer 1.97 (Svežnji z diskretnim vlaknom) Če je Y končna ali števna množica z diskretno topologijo, potem je sveženj $\pi\colon Z \to X$ z vlaknom Y krovni prostor nad X (glej def. 1.68). Krovni prostori so torej svežnji z diskretnimi vlakni. □

Primer 1.98 (Produktni in trivialni sveženji) Sveženj

$$\pi\colon Z = X \times Y \to X, \qquad \pi(x,y) = x$$

imenujemo *produktni sveženj z vlaknom Y nad X*.

Sveženj $\pi\colon Z \to X$ z vlaknom Y je *trivialen*, če je izomorfen produktnemu svežnju; to je, če obstaja difeomorfizem $\Phi\colon Z \to X \times Y$, tako da velja $pr \circ \Phi = \pi$. Tak difeomorfizem imenujemo tudi *trivializacija svežnja $Z \to X$*.

Iz definicij sledi, da je sveženjska karta $\theta\colon Z|_U = \pi^{-1}(U) \to U \times Y$ izomorfizem zoženega svežnja $Z|_U$ na produktni sveženj $U \times Y$. *Torej je vsak sveženj lokalno trivialen*, torej izomorfen produktnemu svežnju nad majhnimi odprtimi množicami v bazi X. □

Pogosto omejimo tip svežnja z zahtevo, da pripadajo prehodni difeomorfizmi $g_{ij}(x,\cdot)$ neki dani podgrupi $\Gamma \subset \mathrm{Diff}^r(Y)$, ki se imenuje *strukturna grupa svežnja*.

Primer 1.99 (Vektorski svežnji) Sveženj z vlaknom $\mathbb{R}^n$ in strukturno grupo $GL_n(\mathbb{R})$ imenujemo *realen vektorski sveženj ranga n nad X* (def. 3.1 na str. 89).

Sveženj $\pi\colon Z \to X$ z vlaknom $\mathbb{C}^n$ in strukturno grupo $GL_n(\mathbb{C})$ imenujemo *kompleksen vektorski sveženj ranga n nad X*. Če sta X in Z kompleksni mnogoterosti in so projekcija $\pi\colon Z \to X$ ter sveženjske karte (1.22) holomorfne, potem je $\pi\colon Z \to X$ *holomorfen vektorski sveženj* nad X.

Prehodne preslikave (1.23) v vektorskem svežnju so oblike

$$\theta_{ij}(x,v) = \big(x, g_{ij}(x)v\big), \quad x \in U_{ij},\ v \in \mathbb{R}^n, \tag{1.24}$$

kjer družina preslikav $g_{ij}\colon U_{ij} \to GL_n(\mathbb{R})$ (oziroma $g_{ij}\colon U_{ij} \to GL_n(\mathbb{C})$) zadošča 1-kocikelnemu pogoju:

$$g_{ii} = 1, \quad g_{ij}g_{ji} = 1, \quad g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1.$$

Pri tem smo z 1 označili identično matriko.

Obratno: vsakemu 1-kociklu preslikav (g_{ij}) na nekem pokritju $\mathscr{U} = \{U_i\}$ baze X pripada vektorski sveženj $\pi\colon Z \to X$, ki ima sveženjski atlas $\theta_i\colon Z|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^n$ prehodnimi preslikavami g_{ij} (1.24). Tako dobljen vektorski sveženj je razreda $\mathscr{C}^r$ natanko tedaj, ko so baza X in preslikave g_{ij} razreda $\mathscr{C}^r$. Družina prehodnih preslikav (g_{ij}) določa vektorski sveženj do izomorfizma natančno.

Več o vektorskih svežnjih lahko najdete v poglavju 3.

Primer 1.100 (Univerzalni sveženj) Spomnimo se (glej razdelek 1.4.4), da sta $\mathbb{RP}^n$ in $\mathbb{CP}^n$ realni oz. kompleksni projektivni prostor dimenzije n.

Trditev 1.101 *Kanonična kvocientna projekcija $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1}_* \to \mathbb{RP}^n$ je realno analitičen sveženj z vlaknom $\mathbb{R}_*$. Projekcija $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1}_* \to \mathbb{CP}^n$ je holomorfen sveženj z vlaknom $\mathbb{C}^*$, ki se imenuje* univerzalni sveženj *nad $\mathbb{CP}^n$.*

Dokaz Naj bo

$$U_j = \{x = (x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_* \colon x_j \neq 0\}, \quad V_j = \pi(U_j) \subset \mathbb{RP}^n.$$

Definiramo preslikavo

$$\theta_j\colon U_j \to V_j \times \mathbb{R}_*, \quad \theta_j(x_0,\dots,x_n) = ([x_0 : \cdots : x_n], x_j).$$

Tedaj je θ_j sveženjska karta na U_j. Za $0 \le i,j \le n$ je prehodna preslikava enaka

$$\theta_{ij}([x],v) = (\theta_i \circ \theta_j^{-1})([x],v) = \left([x_0 : \cdots : x_n], \frac{x_i}{x_j}v\right). \tag{1.25}$$

Trditev sledi. Isti dokaz velja v kompleksnem primeru.

Primer 1.102 (Razpih (blowup) točke $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$) Ker so prehodne preslikave θ_{ij} (1.25) linearne na vsakem vlaknu (množenje s številom x_i/x_j), lahko svežnju $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1}_* \to \mathbb{RP}^n$ (oz. $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1}_* \to \mathbb{CP}^n$) dodamo ničelni prerez. Tako dobimo (realen oz. kompleksen) vektorski sveženj ranga 1 nad $\mathbb{RP}^n$ oz. $\mathbb{CP}^n$. Podrobneje si oglejmo kompleksen primer:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r] & E \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}^{n+1} \\
& \mathbb{CP}^n &
\end{tikzcd}$$

Množica E je totalni prostor holomorfnega svežnja premic nad $\mathbb{CP}^n$. Lahko je predstavimo kot *incidenčno podmnožico* v produktu $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$:

$$E = \left\{ \big([x],z\big) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : \exists\, t \in \mathbb{C}, \text{ tako da je } z = tx \right\}, \quad \pi'\big([x],z\big) = z.$$

Projekcija $\pi' \colon E \to \mathbb{C}^{n+1}$ je surjektivna z vlakni

$$(\pi')^{-1}(z) = \begin{cases} \big([z],z\big), & z \neq 0; \\ \left\{ \big([x],0\big) : [x] \in \mathbb{CP}^n \right\}; & z = 0. \end{cases}$$

Torej je vlakno E_0 nad točko $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ izomorfno projektivnemu prostoru $\mathbb{CP}^n$, zožena projekcija $\pi' \colon E \setminus E_0 \to \mathbb{C}^{n+1}_*$ pa je biholomorfna.

Kompleksna mnogoterost E se imenuje *razpih* (ang. *blowup* točke $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Ta konstrukcija in njene posplošitve (razpih vzdolž kompleksne podmnogoterosti) so izjemnega pomena v algabraični in analitični geometriji, še posebej pri desingularizaciji analitičnih podmnožic. Najpomembnejši izrek v tej smeri je dokazal japonski matematik Hironaka. Lokalni model *kompleksnega prostora s singularnostmi* so analitične množice v $\mathbb{C}^N$, to je, množice definirane s holomorfnimi enačbami.

Izrek 1.103 (Hironaka: Izrek o desingularizaciji) *Za vsak kompleksen prostor s singularnostmi X obstaja kompleksna mnogoterost Z in prava holomorfna surjektivna projekcija $\pi \colon Z \to X$ s kompaktnimi vlakni $Z_x = \pi^{-1}(x)$ ($x \in X$), tako da je π biholomorfna nad regularnim delom X_{reg} prostora X.*

Primer 1.104 (Glavni svežnji) Naj bo G neka *Liejeva grupa*; to je gladka mnogoterost, v kateri sta produkt $G \times G \to G$, $(g,g') \mapsto gg'$, ter invertiranje $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, gladki operaciji. (Glej poglavje 6.)

Grupa G deluje na sami sebi kot grupa translacij s produktom na levi:

$$G \ni g \mapsto \theta_g \in \mathrm{Diff}(G), \quad \theta_g(g') = gg' \quad \forall g' \in G.$$

Primeri Liejevih grup so matrične grupe, to je podgrupe v $GL_n(\mathbb{R})$ ali $GL_n(\mathbb{C})$. Več o Liejevih grupah lahko najdete v poglavju 6.

Sveženj $\pi \colon Z \to X$ z vlaknom G in strukturno grupo G (ki deluje na G kot grupa translacij) imenujemo *glavni G-sveženj nad X*. Tak sveženj je *holomorfen*, če sta X in Z kompleksni mnogoterosti, G je kompleksna Liejeva grupa in so projekcija $\pi \colon Z \to X$ ter sveženjske karte (1.22) holomorfne.

Prehodne preslikave (1.23) v glavnem G svežnju so oblike

$$(x,g) \mapsto \big(x, g_{ij}(x)g\big), \quad x \in U_{ij},\ g \in G,$$

kjer družina preslikav $g_{ij}\colon U_{ij} \to G$ zadošča 1-kocikelnemu pogoju:

$$g_{ii} = 1, \quad g_{ij}g_{ji} = 1, \quad g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1.$$

Pri tem smo z $1 \in G$ označili enoto grupe G.

Poglavje 2

Tangentni sveženj in vektorska polja

2.1 Tangentni sveženj mnogoterosti

2.1.1 Tangentni sveženj evklidskega prostora

Naj bo D domena v $\mathbb{R}^n$ in $f = (f_1,\dots,f_m)\colon D \to \mathbb{R}^m$ diferenciabilna preslikava. Njen *diferencial* v točki $p \in D$ je linearna preslikava

$$df_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad v \mapsto df_p \cdot v,$$

ki je najboljša linearna aproksimacija f v točki p v smislu, da je

$$f(p+v) = f(p) + df_p \cdot v + o(v), \quad \lim_{v\to 0} \frac{o(v)}{|v|} = 0.$$

V standardnem paru baz na $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ je diferencial predstavljen z Jacobijevo matriko $J(f)(p) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)$ parcialnih odvodov komponent f_i po spremenljivkah x_j.

Tangentni prostor $T_p\mathbb{R}^n$ evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ v točki p je množica vseh vektorjev $v \in \mathbb{R}^n$, pripetih v p; torej je $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.
Tangentni sveženj domene $D \subset \mathbb{R}^n$ je disjunktna unija tangentnih prostorov $T_p\mathbb{R}^n$ po vseh točkah $p \in D$:

$$TD = \bigsqcup_{p\in D} T_p\mathbb{R}^n \cong D \times \mathbb{R}^n.$$

Označimo s $\pi\colon TD = D \times \mathbb{R}^n \to D$ bazno projekcijo $\pi(p,v) = p$. Tangentni sveženj domene $D \subset \mathbb{R}^n$ je torej *produktni sveženj ranga n* nad D.
Definiramo še *tangentno preslikavo* $Tf\colon TD \to T\mathbb{R}^m$ s predpisom

$$TD = D \times \mathbb{R}^n \ni (p,v) \mapsto TF(p,v) = \big(f(p), df_p \cdot v\big) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = T\mathbb{R}^m.$$

To je preslikava, ki preslika vlakno nad $p \in D$ v vlakno nad $f(p)$, na vlaknu pa je definirana kot diferencial df_p. Torej komutira naslednji diagram:

$$\begin{array}{ccc} TD & \xrightarrow{Tf} & T\mathbb{R}^m \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ D & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Prireditev, ki domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ priredi njen tangetni sveženj $TD = D \times \mathbb{R}^n$ in diferenciabilni prelikavi $f\colon D \to D' \subset \mathbb{R}^m$ priredi njeno tangetno preslikavo $Tf\colon TD \to TD'$, je *funktorialna*, to je, izpolnjuje naslednje lastnosti:

- $T(\mathrm{Id}_D) = \mathrm{Id}_{TD}$.
- $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.
- $T(f^{-1}) = (Tf)^{-1}$, če je $f\colon D \to D'$ difeomorfizem.

Prva lastnost je očitna. Druga sledi neposredno iz verižnega pravila diferencial kompozicije preslikav:

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p.$$

Zadnja lastnost sledi iz prvih dveh, saj je $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

Prireditev $D \rightsquigarrow TD$, $f \rightsquigarrow Tf$, je torej *kovarianten funktor*.

Opisane pojme želimo sedaj posplošiti na gladke mnogoterosti. Intuitivna predstava tangetnih vektorjev na evklidskem prostoru ne dopušča direktne posplošitve, saj na mnogoterostih nimamo linearne strukture in zato vektorjev ne moremo preprosto translatirati.

Opisali bomo dve konstrukciji tangetnega funktorja. Prva, *geometrijska konstrukcija*, sloni na predstavi tangentnih vektorjev kot *hitrostnih vektorjev poti*. Ta prireditev je povsem očitna na evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$. Fiksirajmo točko $p \in \mathbb{R}^n$. Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ nek odprt interval, ki vsebuje točko $0 \in \mathbb{R}$, in $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ diferenciabilna pot, ki zadošča pogoju $\gamma(0) = p$. Njen hitrostni vektor

$$\dot{\gamma}(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$$

lahko razumemo kot tangetni vektor prostora $\mathbb{R}^n$ v točki p. Dve poti γ_1, γ_2 določata isti tangetni vektor, če velja $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ in $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$. Obratno, vsak vektor $v \in \mathbb{R}^n$ je hitrostni vektor neke poti skozi točko $p \in \mathbb{R}^n$, npr. premice $\gamma(t) = p + tv$.

Ta ideja se da posplošiti na mnogoterosti. Tangentni vektorji v točki $p \in X$ bodo ravno hitrostni vektorji poti v X, ki gredo pri $t = 0$ skozi p.

Za vektorje $v \in T_p\mathbb{R}^n$ imamo še drugo naravno interpretacijo, ki se ravno tako da posplošiti na mnogoterosti. Vektorju $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ priredimo *smerni odvod* v točki $p \in \mathbb{R}^n$:

$$\nabla_v f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\, v_j = \nabla f(p) \cdot v.$$

Označimo z $\mathscr{C}_p^\infty$ algebro zarodkov gladkih funkcij v točki p. (Zarodek funkcije v točki p je predstavljen s funkcijo v neki odprti okolici te točke, pri čemer dve funkciji predstavljala isti zarodek v točki p, če se ujemata v neki okolici p.) Očitno je ∇_v linearen operator

$$\nabla_v \colon \mathscr{C}_p^\infty \to \mathbb{R},$$

ki zadošča *Leibnizovemu pravilu*:

$$\nabla_v(fg) = \nabla_v f \cdot g(p) + f(p) \cdot \nabla_v f$$

Tak operator se imenuje *derivacija* na algebri $\mathscr{C}_p^\infty$. Videli bomo, da so derivacije v naravni bijektivni korespondenci s smernimi odvodi, torej z vektorji $v \in \mathbb{R}^n$.

2.1.2 Geometrijska konstrukcija tangentnega svežnja

Naj bo X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^1$ in $p \in X$. Označimo z Γ_p množico vseh $\mathscr{C}^1$ poti $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$, ki zadoščajo pogoju $\gamma(0) = p$. Število $\varepsilon > 0$ je lahko odvisno od γ.

Definicija 2.1 *Poti $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_p$ sta ekvivalentni, $\gamma_1 \sim \gamma_2$, če obstaja lokalna karta (U, ϕ) na X, $p \in U$, tako da velja*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi \circ \gamma_1(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi \circ \gamma_2(t). \tag{2.1}$$

Trditev 2.2 *Definicija relacije $\sim$ je neodvisna od izbire lokalne karte. Tako definirana relacija $\sim$ je ekvivalenčna relacija.*

Dokaz Naj bo (V, ψ) neka druga karta na X. Za vsako pot $\gamma \in \Gamma_p$ velja

$$\psi \circ \gamma = (\underbrace{\psi \circ \phi^{-1}}_{\text{prehodna}}) \circ (\underbrace{\phi \circ \gamma}_{\text{pot v } \mathbb{R}^n}).$$

Denimo, da poti γ_1 in γ_2 zadoščata pogoju (2.1). Z uporabo verižnega pravila dobimo

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi \circ \gamma_1(t) &= d(\psi\phi^{-1})_{(\phi(p))} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi \circ \gamma_1(t) \\
&= d(\psi\phi^{-1})_{(\phi(p))} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi \circ \gamma_2(t) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi \circ \gamma_2(t).
\end{aligned}$$

To ravno pomeni, da sta γ_1 in γ_2 ekvivalentno tudi glede na karto ψ. Očitno je $\sim$ ekvivalenčna relacija. $\square$

Označimo z $[\gamma]_p$ ekvivalenčni razred poti $\gamma \in \Gamma_p$ glede na relacijo $\sim$.

Definicija 2.3 (Tangentni prostor) *Tangentni prostor mnogoterosti X v točki p je množica ekvivalenčnih razredov $\mathscr{C}^1$ poti skozi p glede na relacijo v definiciji 2.1:*

$$T_pX = \{[\gamma]_p : \gamma \in \Gamma_p\}.$$

Primer 2.4 $X = \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$. Če uporabimo identično karto na $\mathbb{R}^n$, vidimo:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \dot\gamma_1(0) = \dot\gamma_2(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Torej je ekvivalenčni razred $[\gamma]_p$ natančno določen z vektorjem $\dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^n$. Preslikava

$$T_p\mathbb{R}^n \ni [\gamma]_p \longmapsto \dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^n$$

je bijektivna: injektivna je po definiciji relacije $\sim$, surjektivnost pa vidimo tako, da poljubnemu vektorju $v \in \mathbb{R}^n$ priredimo pot $\gamma(t) = p + tv$; očitno je $[\gamma]_p \mapsto \dot\gamma(0) = v$. Torej lahko identificiramo tangentni prostor $T_p\mathbb{R}^n$ (v smislu Def. 2.3) z $\mathbb{R}^n$. $\square$

Naj bo X poljubna $\mathscr{C}^1$-mnogoterost in $p \in X$. Izberemo lokalno karto (U,ϕ) na X, $p \in U$. Preslikava $d\phi_p \colon T_pX \to \mathbb{R}^n$, definirana s predpisom

$$T_pX \ni [\gamma]_p \overset{d\phi_p}{\longmapsto} [\phi\circ\gamma]_{\phi(p)=0} = (\phi\circ\gamma)^{\cdot}(0) \in \mathbb{R}^n,$$

je bijekcija. Surjektivnost vidimo tako, da vektorju $v \in \mathbb{R}^n$ priredimo pot

$$t \mapsto \phi(p) + tv \in \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv), \quad \gamma(0) = p.$$

Očitno je $d\phi_p[\gamma]_p = v$. Injektivnost sledi direktno iz definicije relacije $\sim$ na Γ_p. Preslikava $d\phi_p$ se imenuje *diferencial* preslikave ϕ v točki p.

Sedaj definirajmo diferencial poljubne preslikave.

Definicija 2.5 *Naj bo $f \colon X \to Y$ diferenciabilna preslikava. Njen diferencial v točki p je preslikava $df_p \colon T_pX \to T_{f(p)}Y$, definirana s predpisom*

$$df_p[\gamma]_p = [f\circ\gamma]_{f(p)} \in T_{f(p)}Y \quad \forall[\gamma]_p \in T_pX. \tag{2.2}$$

Trditev 2.6 *Diferencial df_p je dobro definirana preslikava, torej je desna stran odvisna le od od izbire predstavnika ekvivalenčnega razreda $[\gamma]_p \in T_pX$.*

Dokaz Naj bosta poti γ in γ' ekvivalentni v p: $[\gamma]_p = [\gamma']_p$. To pomeni, da za vsako lokalno karto (U,ϕ) na X, $p \in U$, velja $(\phi\circ\gamma)^{\cdot}(0) = (\phi\circ\gamma')^{\cdot}(0)$. Dokazati moramo

$$[\phi\circ\gamma]_{f(p)} = [f\circ\gamma']_{f(p)} \in T_{f(p)}Y.$$

Izberimo karto (V,ψ) na Y, tako da je $f(p)\in V$. Zgornji pogoj je ekvivalenten

$$(\psi\circ f\circ\gamma)^{\cdot}(0)=(\psi\circ f\circ\gamma')^{\cdot}(0)$$

To sledi z uporabo verižnega pravila za preslikave med evklidskimi prostori:

$$(\psi f\gamma)^{\cdot}(0)=(\psi f\phi^{-1}\phi\gamma)^{\cdot}(0)=((\psi f\phi^{-1})\circ(\phi\gamma))^{\cdot}(0)=d(\psi f\phi^{-1})_{\phi(p)}(\phi\gamma)^{\cdot}(0)=$$
$$=d(\psi f\phi^{-1})_{\phi(p)}(\phi\gamma')^{\cdot}(0)=(\psi f\gamma')^{\cdot}(0).$$

Trditev je s tem dokazana. □

Definicija 2.7 *Tangentni sveženj $\mathscr{C}^1$-mnogoterosti X je disjunktna unija tangentnih prostorov v točkah $p\in X$:*

$$TX=\bigsqcup_{p\in X}T_pX$$

Označimo s $\pi\colon TX\to X$ bazno projekcijo; torej je $\pi^{-1}(p)=T_pX$ za vsak $p\in X$.

Diferenciabilni preslikavi $f\colon X\to Y$ mnogoterosti priredimo njeno *tangentno preslikavo* $Tf\colon TX\to TY$, tako da komutira diagram

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{Tf} & TY \\ \pi\big\downarrow & \circlearrowleft & \big\downarrow\pi' \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

in je $Tf|_{T_pX}=df_p:T_pX\to T_{f(p)}Y$ diferencial preslikave f v točki $p\in X$.

Osnovni primer: $X=\mathbb{R}^n, Y=\mathbb{R}^m$: $TX=X\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. (Isto velja, če je X odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$: $TX=X\times\mathbb{R}^n$.) Za vsako diferenciabilno preslikavo $f\colon X\to\mathbb{R}^m$ je tangentna preslikava $Tf\colon TX\to T\mathbb{R}^m$ podana s predpisom

$$(Tf)(x,v)=\big(f(x),df_x\cdot v\big).$$

Izrek 2.8 *Tangentna preslikava zadošča naslednjim lastnostim:*

1. $T(\mathrm{Id}_X)=\mathrm{Id}_{TX}$.
2. $f\in\mathscr{C}^1(X,Y)$, $g\in\mathscr{C}^1(Y,Z)\Longrightarrow T(g\circ f)=Tg\circ Tf$.
3. *Če je* $f\in\mathrm{Diff}(X,Y)$ *difeomorfizem z inverzom* $f^{-1}\colon Y\to X$, *je* $T(f^{-1})=(Tf)^{-1}$.

Dokaz Navedene lastnosti sledijo neposredno iz definicije diferenciala (def. 2.5). Zadnja trditev je preprosta posledica prvih dveh. □

Sedaj bomo tangentni sveženj TX opremili s strukturo $\mathscr{C}^{r-1}$ vektorskega svežnja nad X. Naj bo $\mathscr{U}=\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ nek $\mathscr{C}^r$-atlas na X. Vsaki karti $\phi_\alpha\colon U_\alpha\to U'_\alpha\subset\mathbb{R}^n$ priredimo njeno tangentno preslikavo:

$$T\phi_\alpha\colon TX|_{U_\alpha}=TU_\alpha\longrightarrow TU'_\alpha=U'_\alpha\times\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,$$

$$T_pX \ni [\gamma]_p \xrightarrow{T\phi_\alpha} \big(\phi_\alpha(p), (d\phi_\alpha)_p[\gamma]_p\big) = \left(\phi_\alpha(p), \frac{d}{dt}(\phi_\alpha \circ \gamma)(0)\right).$$

Tako dobimo na TX atlas $\big\{(TU_\alpha, T\phi_\alpha)\big\}$. Denimo, da $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq 0$. Oglejmo si prehodno preslikavo:

$$(T\phi_a)\circ(T\phi_\beta)^{-1}\colon\ \underbrace{\phi_\beta(U_{\alpha\beta})\times\mathbb{R}^n}_{T(\phi_\beta(U_{\alpha\beta}))} \longrightarrow \underbrace{\phi_\alpha(U_{\alpha\beta})\times\mathbb{R}^n}_{T(\phi_\alpha(U_{\alpha\beta}))}$$

$$T(\phi_\alpha)(T\phi_\beta)^{-1} = T(\phi_\alpha)\circ T(\phi_\beta^{-1}) = T(\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}) = T(\phi_{\alpha\beta}),$$

$$(x,v) \longmapsto \big(\phi_{\alpha\beta}(x), d\phi_{\alpha\beta}(x)v\big).$$

Ker je prehodna preslikava $\phi_{\alpha\beta}(x)$ $\mathscr{C}^r$-difeomorfizem, je njen diferencial $d\phi_{\alpha\beta}(x)$ predstavljen z neizrojeno $n\times n$ matrično funkcijo, katere komponente so prvi parcialni odvodi komponent $\phi_{\alpha\beta}$, torej so $\mathscr{C}^{r-1}$ funkcije spremenljivke x. Zato je preslikava

$$(x,v) \longmapsto d\phi_{\alpha\beta}(x)v$$

razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ v obeh spremenljivkah; v spremenljivki $v\in\mathbb{R}^n$ je linearna.

Topologija na X je enolično določena z zahtevo, da je vsaka množica oblike $TX|_{U_\alpha} = TU_\alpha$ odprta v TX in je prirejena karta $T\phi_\alpha$ homeomorfizem:

$$T\phi_\alpha : TX|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U'_\alpha \times \mathbb{R}^n.$$

Očitno je X topološka mnogoterost dimenzije $\dim TX = 2\dim X$.

Preslikava $T\phi_\alpha$ ni sveženjska karta na TX v smislu definicije 1.95, saj smo bazno točko $x\in U_\alpha$ preslikali v množico $\phi_\alpha(U_\alpha) = U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, medtem ko se v definiciji 1.95 bazna točka ohranja. Definirajmo sedaj preslikavo

$$\Theta_\alpha\colon\ TX|_{U_\alpha} \to U_\alpha\times\mathbb{R}^n, \qquad \Theta_\alpha(e) = (\pi(e), d\phi_\alpha\cdot e), \tag{2.3}$$

kjer je diferencial $d\phi_\alpha$ evalviran v bazni točki $p = \pi(e)\in U_\alpha$. Očitno je Θ_α homeomorfizem. (Edina razlika s $T\phi_\alpha$ je, da v Θ_α ohranjamo bazno točko.) Prehodna preslikava

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Theta_\alpha\circ\Theta_\beta^{-1}\colon U_{\alpha\beta}\times\mathbb{R}^n \ \longrightarrow\ U_{\alpha\beta}\times\mathbb{R}^n$$

je enaka

$$\Theta_{\alpha\beta}(x,v) = \big(x, (d\phi_{\alpha\beta})_{\phi_\beta(x)}v\big), \qquad x\in U_{\alpha\beta},\ v\in\mathbb{R}^n.$$

Torej je $\Theta_{\alpha\beta}(x,\cdot)\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ linearni izomorfizem vlakna. Družina $\{\Theta_\alpha\}_\alpha$ je torej *sveženjski atlas* razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ na TX, in TX opremljen s tem atlasom je $\mathscr{C}^{r-1}$ vektorski sveženj ranga $n = \dim X$ nad X.

Izrek 2.8 pove, da je prireditev

$$\begin{array}{ccc} X & \rightsquigarrow & TX \\ (f\colon X \to Y) & \rightsquigarrow & (Tf : TX \to TY) \end{array}$$

kovarianten funktor iz kategorije $\mathscr{C}^r$-mnogoterosti v kategorijo $\mathscr{C}^{r-1}$-vektorskih svežnjev nad $\mathscr{C}^r$-mnogoterostmi. Ta funktor se imenuje *tangentni funktor*.

2.1.3 Tangentni prostor podmnogoterosti

Naj bo $X \subset \mathbb{R}^n$ $\mathscr{C}^r$-podmnogoterost dimenzije m in kodimenzije $d = n - m$. Za vsako točko $p \in X$ obstaja okolica $U \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathscr{C}^r$-funkcije $g_1, \ldots, g_d\colon U \to \mathbb{R}$ z linearno neodvisnimi gradienti, tako da je

$$X \cap U = \{x \in U\colon g_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, d\}.$$

Tangentni sveženj $TX|_{X\cap U}$ je enak

$$TX|_{X\cap U} = \{(x, v)\colon x \in U, v \in \mathbb{R}^n, g_j(x) = 0, dg_j(x) \cdot v = 0,\ j = 1, \ldots, d\}$$

Odtod vidimo, da je tangentni sveženj TX podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ tangentnega svežnja $T\mathbb{R}^n|_X = X \times \mathbb{R}^n$.

Velja še nekoliko več. Dopolnimo preslikavo $g = (g_1, \ldots, g_d)\colon U \to \mathbb{R}^d$ do lokalne karte

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m, g_1, \ldots, g_d)\colon U \to \phi(U) = U' \subset \mathbb{R}^n.$$

Prirejena sveženjska karta $T\phi\colon TU \to TU' = U' \times \mathbb{R}^n$ na tangentnem svežnju $T\mathbb{R}^n$ preslika $TX|_U$ na množico

$$\phi(U \cap X) \times \big(\mathbb{R}^m \times \{0\}^d\big) = \big(U' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d)\big) \times \big(\mathbb{R}^m \times \{0\}^d\big).$$

Torej se vsako vlakno T_pX $(p \in U \cap X)$ preslika z lokalno sveženjsko karto $T\phi$ v standardni linearni podprostor $\mathbb{R}^m \times \{0\}^d \subset \mathbb{R}^n$.

V takem primeru pravimo, da je TX *vektorski podsveženj* ranga m svežnja $T\mathbb{R}^n|_X \cong X \times \mathbb{R}^n$.

Analogno konstrukcijo lahko naredimo v splošnejšem primeru, ko je X podmnogoterost v poljubni mnogoterosti Y; njen tangentni sveženj TX je vektorski podsveženj svežnja $TY|_X$, to je tangetnega svežnja mnogoterosti Y, zoženega na podmnogoterost X.

2.1.4 Algebraična konstrukcija tangentnega svežnja

Da se izognemo določenim nevsebinskim tehničnim težavam, se omejimo na primer, ko je X gladka ($\mathscr{C}^\infty$) mnogoterost. Definirajmo

$$\mathscr{C}^\infty_{p,X} = \text{ algebra zarodkov gladkih funkcij v } p \in X.$$

Tangentni prostor T_pX definiramo kot množico vseh operatorjev $v\colon \mathscr{C}^\infty_p \to \mathbb{R}$, ki so linearni in zadoščajo Leibnitzovemu pravilu

$$v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g).$$

Taki operatorji se imenujejo *derivacije* na algebri zarodkov $\mathscr{C}^\infty_{p,X}$. Torej bomo tangentne vektorje $v \in T_pX$ predstavili z derivacijami.
Oglejmo si sedaj osnovni primer $X = \mathbb{R}^n$, $p = 0 \in \mathbb{R}^n$. Z uporabo Leibnitzovega pravila za konstantni funkciji $f = g \equiv 1$ dobimo

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1) = 2v(1) \Rightarrow v(1) = 0.$$

Odtod sledi, da je vrednost v na vsaki konstantni funkciji enaka nič.

Trditev 2.9 *Vsako gladko funkcijo f v okolici točke $0 \in \mathbb{R}^n$ lahko predstavimo v obliki*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j\, g_j(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.4}$$

za neke gladke funkcije $g_1, \ldots, g_n$ v neki okolici točke $0 \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz Po osnovnem izreku integralnega računa velja

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(tx)\, dt = f(0) + \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(tx)\, dt = f(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j\, g_j(x)$$

kjer je $g_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} f(tx)\, dt$. □

Trditev 2.10 *Vsaka derivacija v na algebri $\mathscr{C}^\infty_{0,\mathbb{R}^n}$ je enolično predstavljena s smernim odvodom $\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, kjer je $v_j = v(x_j) \in \mathbb{R}$ za $j = 1, \ldots, n$.*

Dokaz Definiramo $v_j = v(x_j) \in \mathbb{R}$ (derivacija v deluje na koordinatni funkciji x_j). Iz razvoja (2.4) ter $v(f(0)) = 0$ sledi

$$v(f) = \sum_{j=1}^{n} v(x_j) \cdot g_j(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j(0) \cdot v(g_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot g_j(0) = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)(f)\Big|_{x=0}.$$

Trditev je dokazana. S tem dobimo izomorfizem $T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. □

Sedaj definirajmo diferencial preslikave. Če je $f\colon X \to Y$ gladka preslikava gladkih mnogoterosti, potem je za vsak $p \in X$ preslikava

$$f^*\colon \mathscr{C}^\infty_{f(p),Y} \longrightarrow \mathscr{C}^\infty_{p,X}, \qquad g \overset{f^*}{\longmapsto} g \circ f$$

homomorfizem algeber zarodkov. Diferencial $df_p\colon T_pX \to T_{f(p)}Y$ definiramo kot njej dualno preslikavo:

$$(df_p \cdot v)(g) \overset{def}{=} v(g \circ f) \quad \forall g \in \mathscr{C}^\infty_{f(p),Y}.$$

Lahko je preveriti, da tako definiran diferencial in prirejena tangentna preslikava zadoščata istim lastnostim, kot smo jih dobili pri geometrijski konstrukciji.

Sedaj imamo dve konstrukciji tangetnega funktorja — geometrijsko in algebraično. Obe konstrukciji sta v naravni zvezi, ki jo dobimo iz naslednjega opažanja.

Naj bo $\gamma \in \Gamma_p$ gladka pot skozi točko $\gamma(0) = p \in X$ v mnogoterosti X. Po eni strani γ določa geometrijski tangentni vektor $v = [\gamma] \in T_pX$. Obenem določa tudi derivacijo v_γ na algebri $\mathscr{C}^\infty_p$ (torej algebraičen tangenten vektor $\delta_\gamma \in T^a_pX$, kjer smo s superskriptom a označili, da gre za algebraično definiran tangetni prostor) s predpisom

$$\delta_\gamma\colon \mathscr{C}^\infty_p \to \mathbb{R}, \qquad \delta_\gamma(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\gamma(t)) \;\; \forall f \in \mathscr{C}^\infty_p.$$

Trivialno je preveriti, da je δ_γ res derivacija, ki je odvisna le od vektorja $v = [\gamma] \in T_pX$ (ni pa odvisna od izbire predstavnika tega vektorja). Torej dobimo inducirano preslikavo

$$\theta\colon T_pX \to T^a_pX, \qquad v = [\gamma] \mapsto \theta(v) = \delta_\gamma$$

geometrijskega tangentnega prostora T_pX v algebraičen tangentni prostor T^a_pX.

V primeru $X = \mathbb{R}^n$ je preslikava $\theta\colon T_p\mathbb{R}^n \to T^a_p\mathbb{R}^n$ izomorfizem, ki vektorju $v = \dot\gamma(0) \in T_p\mathbb{R}^n$ priredi smerni odvod $\nabla_v \in T^a_p\mathbb{R}^n$ v točki p.

Preverimo lahko tudi, da za vsako gladko preslikavo $f\colon X \to Y$ komutira naslednji diagram:

$$\begin{array}{ccc}
T_pX & \xrightarrow{df_p} & T_{f(p)}Y \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\theta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\
T^a_pX & \xrightarrow{d^af_p} & T^a_{f(p)}Y
\end{array}$$

Iz teh dejstev sledi, da je θ naravna translacija geometrijskega tangentnega funktorja v algebraičen tangentni funktor.

V praksi pogosto uporabljamo oba pristopa, odvisno od vrste problema.

2.2 Vektorska polja

Definicija 2.11 *Vektorsko polje na mnogoterosti X je prerez tangentnega svežnja, to je funkcija $v\colon X \to TX$, za katero je $v_p \in T_pX$ za vsako točko $p \in X$.*

Vektorsko polje v je razreda $\mathscr{C}^k$ (za nek $k \le r$, če je $\mathscr{C}^k$ preslikava $X \to TX$.

Oglejmo si najprej primer, ko je $X = U$ odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$. Naj bodo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$. Koordinatna vektorska polja na $\mathbb{R}^n$ so

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial x_n};$$

to so smerni odvodi v koordinatnih smereh. Za vsako točko $p \in \mathbb{R}^n$ so vektorji $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ standardna baza tangentnega prostora $T_p\mathbb{R}^n$. Vsako vektorsko polje na odprti množici $U \subset \mathbb{R}^n$ je linearna kombinacija koordinatnih polj:

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad x \in U.$$

Koeficienti v_j so funkcije na U. Vektorsko polje je gladko razreda $\mathscr{C}^k$ natanko tedaj, ko so vse komponentne funkcije v_j razreda $\mathscr{C}^k$.

Potisk in povlek vektorskih polj.

Naj bo $f\colon X \to Y$ $\mathscr{C}^r$-difeomorfizem in v vektorsko polje na X. Potem je $f_*v = w$ vektorsko polje na Y, določeno s pogojem

$$(f_*v)_{f(p)} = df_p \cdot v_p, \quad p \in X.$$

Polje f_*v se imenuje *potisk* vektorskega polja v s preslikavo f. Če je vektorsko polje v razreda $\mathscr{C}^k$ za nek $k \le r-1$, potem je polje $w = f_*v$ prav tako razreda $\mathscr{C}^k$.

Oglejmo si naslednji poseben primer. Naj bo (U, ϕ) lokalna karta na X. Obstajajo natanko določena vektorska polja $e_1, \ldots, e_n$ na $U \subset X$, tako da je

$$\phi_* e_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

V vsaki točki $p \in U$ so vektorji $e_j|_p$ baza tangentnega prostora T_pX, ki jo ϕ_* preslika v standardno bazo prostora $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$. Tako določena n-terica vektorskih polj $(e_1, \ldots, e_n)$ se imenuje je *polje baz* na $TX|_U$ (angl. *frame field*) glede na karto ϕ. Vsako vektorsko polje v na U lahko tedaj enolično zapišemo v obliki

$$v_p = \sum_{j=1}^{n} v_j(p) e_j,$$

kjer se $v_1, \ldots, v_n\colon U \to \mathbb{R}$ funkcije. Ce označimo $x = \phi(p) \in \mathbb{R}^n$, dobimo

$$(\phi_* v)_x = \sum_{j=1}^n v_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x = \sum_{j=1}^n v_j(\phi^{-1}(x)) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x.$$

Naj bo $f = (f_1, \dots, f_n)$ difeomorfizem odprte množice $D \subset \mathbb{R}^n$ na množico $D' \subset \mathbb{R}^n$. Označimo z $x = (x_1, \dots, x_n)$ koordinate na domeni in z $y = (y_1, \dots, y_n)$ koordinate na kodomeni. Za poljubno diferenciabilno funkcijo $g \colon D' \to \mathbb{R}$ dobimo po definiciji potiska f_* in z uporabo verižnega pravila naslednjo identiteto:

$$\begin{aligned} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(g) &= \frac{\partial}{\partial x_j}(g \circ f) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Ker to velja za vsako testno funkcijo g, dobimo

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k}\bigg|_{f(x)}$$

Odtod vidimo, da predstavlja linearno preslikavo $f_* = df_x \colon T_x\mathbb{R}^n \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n$ (diferencial) v standardnih bazah na tangentnih prostorih $T_x\mathbb{R}^n$, $T_{f(x)}\mathbb{R}^m$ Jacobijeva matrika

$$\left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right]_{1 \le j,k \le n}.$$

Poleg potiska $f_* v$ vektorskega polja z difeomorfizmom $f \colon X \to Y$ lahko definiramo tudi *povlek*. Če je w vektorsko polje na Y, potem je

$$v = f^* w = (f^{-1})_* w$$

potisk polja w z inverzno preslikavo $f^{-1} \colon Y \to X$. Tako definirano vektorsko polje $f^* w$ se imenuje *povlek (pull-back)* vektorskega polja w na X.

Povlek lahko definiramo tudi v splošnejšem primeru, kot je $f \colon X \to Y$ *lokalni difeomorfizem*, to je, ko je diferencial $df_x \colon T_x X \to T_{f(x)} Y$ v točk poljubni točki $x \in X$ izomorfizem. Če je w vektorsko polje na Y, potem očitno obstaja natanko eno vektorsko polje v na X, da je $f_* v = w$; kot prej označimo $v = f^* w$.

Potisk vektorskega polja s preslikavo, ki ni injektivna, v splošnem ni dobro definiran, saj iz $x \neq x' \in X$ ter $f(x) = f(x') = y \in Y$ dobimo s potiskom vektorskega polja v na X dve različna vektorja $df_x(v_x), df_{x'}(v_{x'}) \in T_y Y$.

Oglejmo si sedaj poseben primer, ko je $f \colon X \to Y$ regularen $\mathscr{C}^r$-krov za nek $r \ge 1$. Grupa $\Gamma = \mathrm{Deck}_f(X)$ krovnih translacij deluje na X prosto in povsem nezvezno ter je $Y = X/\Gamma$. V tem primeru velja $f(x) = f(x')$ natanko tedaj, ko obstaja $\gamma \in \Gamma$, tako da je $\gamma(x) = x'$. Tedaj je $f \circ \gamma = f$.

Definicija 2.12 *Vektorsko polje v na mnogoterosti X, ki zadošča pogoju $\gamma_* v = v$ za nek $\gamma \in \mathrm{Diff}(X)$, se imenuje* γ-invariantno. *Polje je Γ-invariantno za neko grup difeomorfizmov $\Gamma \subset \mathrm{Diff}(X)$, če je γ-invariantno za vsak $\gamma \in \Gamma$.*

Če je v Γ-invariantno polje vektorsko polje na X in je $f\colon X \to X/\Gamma = Y$ kvocientna projekcija, potem iz $f \circ \gamma = f$ za vsak $\gamma \in \Gamma$ ter verižnega pravila sledi

$$f(x) = f(x') = y \in Y \implies df_x \cdot v_x = df_{x'} \cdot v|_{x'} \in T_y Y.$$

To pomeni, da je potisk $f_* v$ dobro definirano vektorsko polje na kvocientu Y. Obratno, vsako vektorsko polje w na Y ima dobro definiran povlek $f^* w = v$, ki je Γ-invariantno vektorsko polje na X.

Primer 2.13 Naj bo Γ grupa translacij ravnine $\mathbb{R}^2$ z dvema generatorjema. Oglejmo si preprost primer $\Gamma = \langle \gamma, \sigma \rangle$, kjer je $\gamma(x,y) = (x+1, y)$, $\sigma(x,y) = (x, y+1)$. Vsako konstantno vektorsko polje

$$v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

je Γ-invariantno. Torej obstaja vektorsko polje w na torusu $\mathbb{R}^2/\Gamma = \mathbb{T}^2$, ki je prirejeno polju v glede na kvocientno projekcijo $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$. Integralne krivulje polja w so slike premic s smernim vektorjem $k = b/a$. Če je število k iracionalno, je slika vsake take premice povsod gosta v torusu $\mathbb{T}^2$.

Splošneje, vektorsko polje (2.5) je Γ-invariantno, če sta koeficienta a in b Γ-invariantni funkciji na $\mathbb{R}^2$, kar v danem primeru pomeni, da sta dvojno periodični:

$$a(x+1,y) = a(x,y+1) = a(x,y), \quad b(x+1,y) = b(x,y+1) = b(x,y).$$

Definicija 2.14 (Vektorsko polje vzdolž preslikave) *Naj bo v vektorsko polje na mnogoterosti X in w vektorsko polje na mnogoterosti Y. Polje w je* prirejeno *polju v vzdolž preslikave $f : X \to Y$, če velja*

$$df_x \cdot v_x = w_{f(x)} \qquad \forall x \in X.$$

2.3 Tok vektorskega polja

Definicija 2.15 *Naj bo v vektorsko polje na mnogoterosti X. Pot $\gamma\colon (\alpha, \beta) \to X$ razreda $\mathscr{C}^1$, kjer je (α, β) interval v $\mathbb{R}$, se imenuje* integralna krivulja *ali* tokovnica *polja v, če velja*

$$\dot\gamma(t) = v(\gamma(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pri tem je $\dot\gamma(t) = d\gamma_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ in je $\frac{\partial}{\partial t}$ koordinatno vektorsko polje na $\mathbb{R}$.

V lokalnih koordinatah $x = (x_1, \ldots, x_n)$ na X je vektorsko polje v oblike

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Pot $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ je integralna krivulja natanko tedaj, ko velja

$$\dot\gamma(t) = \sum_{j=1}^{n} \dot\gamma_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} v_j(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

To je ekvivalentno sistemu navadnih diferencialnih enačb:

$$\dot\gamma_j(t) = v_j(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Eksistenčni izrek za navadne diferencialne enačbe nam pove naslednje. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $v\colon D \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova preslikava. Potem za vsako točka $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ obstojata okolica $x^0 \in U \subset D$ in število $t_0 > 0$, tako da ima sistem navadnih diferencialnih enačb (2.6) skupaj z začetnim pogojem

$$\gamma(0, x) = x \in U$$

natanko eno rešitev $\gamma(t, x)$ za vsak $t \in (-t_0, t_0)$ in $x \in U$. Rešitev γ je zvezna v $(t, x) \in (-t_0, t_0) \times U$, odvedljiva po spremenljivki t in njen t-odvod $\dot\gamma(t, x)$ je zvezen v (t, x). Če je v gladka razreda $\mathscr{C}^r(D)$, potem sta γ in $\dot\gamma = \frac{\partial}{\partial t}\gamma$ razreda $\mathscr{C}^r$.

Od sedaj dalje bomo lokalno rešitev zgornjega sistema navadnih diferencialnih enačb pisali v obliki $\phi_t(x)$ in jo imenovali *tok polja v*. Torej je za vsak $x \in U$ preslikava $t \mapsto \phi_t(x)$ tokovnica polja v, ki gre pri času $t = 0$ skozi točko x:

$$\dot\phi_t(x) = v(\phi_t(x)), \qquad \phi_0(x) = x.$$

Eksistenčni izrek za sisteme navadnih diferencialni enačb implicira naslednji eksistenčni izrek za tokove vektorskih polj na mnogoterostih.

Izrek 2.16 (Lokalni eksistenčni izrek) *Naj bo v Lipschitzovo vektorsko polje na gladki mnogoterosti X. Za vsako točko $x_0 \in X$ obstaja okolica $U_{x_0} \subset X$ in število $\varepsilon = \varepsilon_{x_0} > 0$, tako da je tok $\phi_t(x)$ definiran za vsako začetno točko $x \in U_{x_0}$ in za vsak $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Tok $\phi_t(x)$ in njegov odvod $\dot\phi_t(x)$ po t sta zvezni funkciji (t, x). Če je polje v gladko razreda $\mathbb{C}^r$, sta ti dve preslikavi razreda $\mathscr{C}^r$.*

Če je $v(x) = 0$ za nek $x \in X$, je tokovnica skozi to točko konstantna preslikava $\gamma(t, x) \equiv x$. Taki točki pravimo *stacionarna* ali *singularna* točka vektorskega polja.

Iz izreka sledi, da za vsako kompaktno množico $K \subset X$ obstaja število $\varepsilon > 0$, tako da je tok $\phi_t(x)$ definiran za vsak $x \in K$ in $|t| \le \varepsilon$.

Iz enoličnosti tokovnic sledi, da za vsak $x \in X$ obstaja največji odprt interval

$$0 \in I_x = (\alpha(x), \omega(x)) \subset \mathbb{R},$$

kjer je $-\infty \le \alpha(x) < 0 < \omega(x) \le +\infty$, tako da je tok $\phi_t(x)$ definiran za vsak $t \in I_x$.

Definicija 2.17 **Fundamentalna domena** *toka ϕ_t je množica*

$$\Omega = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : \alpha(x) < t < \omega(x)\}.$$

Očitno je $X \times \{0\} \subset \Omega$. Iz lokalnega eksistenčnega izreka sledi naslednje.

Lema 2.18 *Funkcija $\omega \colon X \to (0,+\infty]$ je navzdol polzvezna in $\alpha \colon X \to [-\infty,0)$ je navzgor polzvezna. Torej je fundamentalna domena odprta množica v $X \times \mathbb{R}$.*

Trditev 2.19 *Tok $\phi_t(x)$ poljubnega Lipschitzovega vektorskega polja v zadošča naslednjemu grupnemu pravilu na fundamentalni domeni:*

$$\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x)) = \phi_s(\phi_t(x)), \qquad \phi_0 = \mathrm{Id}. \tag{2.7}$$

Dokaz Fiksiramo točko $x \in X$ in število $s \in I_x$. Za majhne $t \in \mathbb{R}$ definiramo

$$\gamma(t) = \phi_{t+s}(x), \qquad \sigma(t) = \phi_t(\phi_s(x)).$$

Očitno je $\gamma(0) = \phi_s(x) = \sigma(0)$. Pišimo $u = t+s$. Z odvajanjem dobimo

$$\dot\gamma(t) = \frac{d}{dt}\phi_{t+s}(x) = \frac{d}{du}\phi_u(x)\,\frac{du}{dt} = v(\phi_u(x)) = v(\phi_{t+s}(x)) = v(\gamma(t)),$$

$$\dot\sigma(t) = \dot\phi_t(\phi_s(x)) = v(\phi_t(\phi_s(x)) = v(\sigma(t)).$$

Torej sta γ in σ tokovnici polja v, ki gresta pri $t = 0$ skozi isto točko. Iz enoličnosti tokovnic Lipschitzovega vektorskega polja sledi $\gamma = \sigma$. □

Iz enakosti

$$\mathrm{Id} = \phi_0 = \phi_{-t} \circ \phi_t$$

sledi, da je za vsak fiksen t preslikava ϕ_t difeomorfizem svojega definicijskega območja $\Omega_t \subset X$ na območje $\phi_t(\Omega_t) \subset X$, z inverzom $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$. Taka družina $\{\phi_t\}$ se imenuje *lokalna eno-parametrična grupa difeomorfizmov.* (Beseda 'lokalna' se nanaša na dejstvo, da ϕ_t ni nujno definiran na vsem X.)

Trditev 2.20 *Če je za neko točko $x \in X$ velja $\omega(x) < +\infty$, potem za vsak kompakt $K \subset X$ obstaja število $\varepsilon > 0$, tako da velja*

$$\phi_t(x) \notin K \quad \textit{za vsak } t \in (\omega(x) - \varepsilon, \omega(x)).$$

Analogna lastnost velja v primeru $\alpha(x) > -\infty$ za vse t blizu $\alpha(x)$.

To pomeni, da tok $\phi_t(x)$ zapusti vsak kompakt v X, ko t narašča proti $\omega(x) < +\infty$.

Dokaz Za vsak kompakt K obstaja število $\varepsilon > 0$, tako da tok $\phi_t(y)$ obstaja za vsako začetno točko $y \in K$ in za vsak $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Recimo sedaj, da za neko točko

$x \in X$ in $t \in (\omega(x) - \varepsilon, \omega(x))$ velja $\phi_t(x) \in K$. Iz grupne lastnosti toka (2.7) sledi $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{t+s}(x)$ za vsak $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Če s izberemo blizu ε, dobimo $t+s > \omega(x)$ v protislovju z definicijo $\omega(x)$. $\square$

Definicija 2.21 (Kompletno vektorsko polje) *Vektorsko polje v na mnogoterosti X se imenuje* povsem integrabilno *ali* kompletno*, če njegov tok $\phi_t(x)$ obstaja za vsako začetno točko $x \in X$ in vsak $t \in \mathbb{R}$.*

Iz definicij sledi, da je polje v kompletno natanko tedaj, ko je njegova fundamentalna domena $\Omega = X \times \mathbb{R}$. V tem primeru je $\phi_t : X \to X$ difeomorfizem za vsak t. Družina

$$\{\phi_t : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Diff}(X) \tag{2.8}$$

se imenuje *enoparametrična grupa difeomorfizmov* mnogoterosti X. Velja tudi obratno: vsaka enoparametrična grupa (2.8) je tok vektorskega polja

$$v(x) = \frac{\partial}{\partial t}\phi_t(x)|_{t=0}, \qquad x \in X.$$

To polje se imenuje *infinitezimalni generator* grupe.

Primer 2.22 Linearno vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$ je oblike

$$v(x) = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

kjer je A neka $n \times n$ matrika. Enačba toka je sistem linearnih parcialnih diferencialnih enačb prvega reda:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x^0.$$

Tok tega polja je podan z matrično eksponentno vrsto

$$\phi_t(x) = e^{tA}x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k\right) x.$$

Vidimo, da je vsako linearno vektorsko polje kompletno.

Opomba: Pogosto se za tok ϕ_t vektorskega polja v uporablja oznaka

$$\phi_t(x) = e^{tv}x.$$

Motivacija pride iz primera, ko je $v(x) = Ax$ linearno polje in je $\phi_t(x) = e^{tA}x$.

Primer 2.23 Na $\mathbb{R}$ opazujemo vektorsko polje $v(x) = x^2$. Enačba toka je

$$\dot{x} = x^2, \qquad x(0) = x_0.$$

Pri začetnemu pogoju $x_0 = 0$ dobimo konstanten tok $\phi_t(0) = 0$. Pri $x_0 \neq 0$ dobimo

$$\phi_t(x_0) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} = \frac{x_0}{1 - tx_0}.$$

Pri času $t_0 = \frac{1}{x_0}$ ima funkcija $\phi_t(x_0)$ pol. Če je $x(0) > 0$, potem tok $\phi_t(x)$ obstaja za vse $-\infty < t < t_0$. Pri začetnemu pogoju $x_0 < 0$ tok $\phi_t(x_0)$ obstaja za vse $t_0 < t < +\infty$. Opazimo tudi, da je $\lim_{t\to t_0} \phi_t(x) = \pm\infty$.

Posledica 2.24 *Če je $M \subset X$ podmnogoterost in je v vektorsko polje na X, ki je tangentno na M v vsaki točki $x \in M$ (to je, $v(x) \in T_xM \subset T_xX$ za vsak $x \in X$), potem za vsak $x \in M$ velja $\phi_t(x) \in M$ na definicijski domeni toka.*

Dokaz Uporabimo lemo 2.27 za vložitev $f\colon M \hookrightarrow X$. Ker je polje v tangentno na M vzdolž M, določa vektorsko polje w na M z enačbo $w_x = v_x$ za $x \in M$. Torej je $f_*w = v$. Po lemi zgoraj preslika f tokovnice polja w v tokovnice polja v. Za vsako točko $x \in M$ je tokovnica polja w hkrati tudi tokovnica polja v, torej je enaka $t \mapsto \phi_t(x)$. Sledi $\phi_t(x) \in M$. □

Primer 2.25 Oglejmo si vektorsko polje $v(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^2$. Velja

$$\langle v, x^2 + y^2\rangle = (-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})(x^2 + y^2) = -2xy + 2xy = 0.$$

Torej je polje v tangentno na vsako nivojnico funkcije $x^2 + y^2$ (krožnice).

Posledica 2.26 *Če je X kompaktna mnogoterost brez roba (sklenjena), potem je vsako vektorsko polje na X kompletno.*

Lema 2.27 *Naj bo $f\colon X \to Y$ naj bo $\mathscr{C}^1$-preslikava, v vektorsko polje na X in w vektorsko polje na Y. Če velja $df_x v(x) = w(f(x))$ za vsak $x \in X$, potem je f-slika poljubne tokovnice polja v tokovnica polja w. Če sta vektorski polji v in w Lipschitzovi, sledi*

$$f(\phi_t(x)) = \psi_t(f(x)),$$

kjer je $\phi_t(x)$ tok polja v in $\psi_t(y)$ tok polja w.

Dokaz Preslikava $t \mapsto \psi_t(f(x))$ je očitno tokovnica polja w, ki je pri $t = 0$ v točki $f(x)$. Trdimo, da je tudi $t \mapsto f(\phi_t(x))$ tokovnica polja w. Odvajamo:

$$\frac{d}{dt}(f(\phi_t(x)) = df_{\phi_t(x)}\frac{d\phi_t}{dt}(x) = df_{\phi_t(x)}v(\phi_t(x)) = w(f(\phi_t(x))).$$

To ravno pomeni, da je $t \mapsto f(\phi_t(x))$ tokovnica polja w. Pri $t = 0$ je $f(\phi_0(x)) = f(x)$. Če sta vektorski polji v in w Lipschitzovi, potem iz enoličnosti integralnih krivulj z dano začetno točko sledi $f(\phi_t(x)) = \psi_t(f(x))$. □

Posledica 2.28 (Izrek Lyapunova) *Naj bo $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ gladka funkcija izčrpanja, to je, za vsak $c \in \mathbb{R}$ je podnivojnica $\{x \in X\colon \rho(x) \le c\}$ kompaktna. Naj bo v vektorsko* *polje na X, ki zadošča pogoju $d\rho_x \cdot v_x \leq 0$ za vse x, ki zadoščajo $\rho(x) \geq c_0$ za nek $c_0 \in \mathbb{R}$. Potem je vektorsko polje v kompletno v pozitivnem času, to je, $\omega(x) = +\infty$ za vsak $x \in X$.*

Dokaz Z uporabo verižnega pravila dobimo:

$$\frac{d}{dt}\rho(\phi_t(x)) = d\rho(\phi_t(x))\frac{d\phi_t(x)}{dt} = d\rho(\phi_t(x))v(\phi_t(x)) \leq 0, \text{ če je } \rho(\phi_t(x)) \geq c_0.$$

Torej funkcija $t \mapsto g(t) = \rho(\phi_t(x))$ ne narašča na nobenem intervalu, na katerem je njena vrednost $\geq c_0$. Izberemo poljubno točko $x \in X$ in število $c \geq c_0$, tako da je $\rho(x) \leq c$. Iz zgornje lastnosti sledi

$$g(t) := \rho(\phi_t(x)) \leq c \quad \text{za vsak } t \in [0, \omega(x)).$$

V nasprotnem primeru bi namreč obstajalo število $t_1 \in (0, \omega(x))$, da bi bilo $g(t_1) > c$. Ker je $g(0) = \rho(x) < c$, bi obstajala točka $t_2 \in (0, t_1)$, v kateri je $g(t_2) > c$ in $\dot{g}(t_2) > 0$. To je v protislovju z zgoraj dokazano lastnostjo.
Odtod sledi, da tok $\phi_t(x)$ za $0 \leq t < \omega(x)$ ostaja v kompaktni množici $\{\rho \leq c\}$. Po prejšnji trditvi zaključimo, da je $\omega(x) = +\infty$. □

Primer 2.29 Naj bo $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka gladka funkcija izčrpanja in

$$v = -\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$$

Hamiltonovo vektorsko polje funkcije ρ. Iz $v(\rho) \equiv 0$ sledi, da je v tangentno na nivojnice funkcije ρ. Ker so le-te kompaktne, sledi, da je polje v kompletno.

2.4 Lokalna oblika vektorskega polja

Vektorsko polje želimo lokalno v okolici neke točke $p \in X$ čim bolj poenostaviti s primerno izbiro lokalnih koordinat. To je preprosto v okolici nesingularnih točk.

Trditev 2.30 *Če je vektorsko polje v na X v neki točki $p \in X$ različno od 0, $v_p \neq 0$, potem obstaja lokalna karta (U, ψ) v okolici točke p, tako da je $\psi_* v = \frac{\partial}{\partial x_1}$ (koordinatno vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$ v smeri prve spremenljivke x_1).*

Dokaz Ker je izrek lokalen, lahko brez izgube splošnosti vzamemo, da je v vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$ v okolici točke $p = 0 \in \mathbb{R}^n$:

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \cong \big(v_1(x), \ldots, v_n(x)\big), \qquad v(0) \neq 0.$$

Z linearno zamenjavo koordinat dosežemo $v(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\big|_0 \cong (1, 0, \ldots, 0)$.

Naj bo ϕ_t tok polja v. Definiramo preslikavo g v okolici $0 \in \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \phi_{x_1}(0,x_2,\ldots,x_n).$$

(Prvo koordinato x_1 smo torej uporabili kot časovno spremenljivko toka.) Iz definicije toka sledi, da je parcialni odvod g po spremenljivki x_1 enak

$$g_* \frac{\partial}{\partial x_1} \cong \frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_{x_1}(0,x_2,\ldots,x_n) = v\big(\phi_{x_1}(0,x_2,\ldots,x_n)\big) = v(g(x)).$$

Torej preslika g koordinatno vektorsko polje $\frac{\partial}{\partial x_1}$ v polje v. V točki $x = 0$ je

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(0) = v(0) = (1,0,\ldots,0).$$

Na hiperravnini $x_1 = 0$ je $g(0,x_2,\ldots,x_n) = (0,x_2,\ldots,x_n)$ identiteta, zato je

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = (0,\ldots,1,\ldots,0), \qquad j = 2,\ldots,n.$$

Torej je $dg(0) = \mathrm{Id}$. Po izreku o inverzni preslikavi je g difeomorfizem v neki okolici 0. Njen inverz $\psi = g^{-1}$ tedaj zadošča $\psi_* v = \frac{\partial}{\partial x_1}$. $\square$

Točke p, v katerih je $v(p) = 0$, se imenujejo *kritične točke* (ali *singularne točke)* vektorskega polja v. V lokalnih koordinatah lahko vzamemo $p = 0 \in \mathbb{R}^n$. Tedaj je

$$v(x) = Ax + o(x), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{||x||} = 0.$$

kjer je A neka $n \times n$ matrika. V splošnem ne moremo odpraviti vseh členov višjega reda z zamenjavo koordinat.

Primer 2.31 V vektorskem polju $v(x) = x + \alpha x^n$ $(x \in \mathbb{R},\ n > 1)$ v splošnem ne moremo odpraviti člena αx^n. Bistvena ovira je, da je to polje tangetno na identiteto pri $x = 0$. Če pa je $c > 0$, $c \neq 1$, potem lahko vektorskem polje

$$v(x) = cx + o(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

lokalno lineariziramo, to je, spremenimo v linearno polje $w(x) = cx$ z neko zamenjavo koordinat v okolici točke $x = 0$.

2.5 Komutator (Liejev oklepaj) vektorskih polj

Naj bosta v, w $\mathscr{C}^2$ vektorski polji na mnogoterosti X in g neka $\mathscr{C}^2$ funkcija na X. *Komutator* $[v,w]$ je diferencialni operator, ki ima na funkciji g nasledno vrednost:

$$[v,w](g) \stackrel{def}{=} v(w(g)) - w(v(g)) \quad \text{funkcija na } X$$

Preveri, da je preslikava $g \mapsto [v,w](g)$ derivacija v vsaki točki:

- linearna v g (aditivna, $\mathbb{R}$-homogena)
- zadošča Leibnitzovemu pravilu.

Naredimo izračun komutatorja v $\mathbb{R}^n$. Naj bo g neka $\mathscr{C}^2$ funkcija in

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad w = \sum_{j=1}^{n} w_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Tedaj je

$$v(w(g)) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^{n} w_k \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) = \sum_{j,k=1}^{n} \left(v_j \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + v_j w_k \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j} \right)$$

$$w(v(g)) = \sum_{j,k=1}^{n} \left(w_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + w_j v_k \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} \right).$$

V razliki se parcialni odvodi drugega reda $\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}$ krajšajo in dobimo:

$$[v,w](g) = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial w_k}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j}}_{a_k} \right) \frac{\partial g}{\partial x_k}$$

$$[v,w](g) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

Ker to velja za vsako testno funkcijo g, sledi

$$[v,w] = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} (v(w_k) - w(v_k)) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Opomba 2.32 *Iz definicije sledi, da je operacija $(v,w) \mapsto [v,w]$ lokalna, to je, vrednost komutatorja $[v,w]$ v neki točki je odvisna le od vrednosti vektorskih polj v,w v poljubno majhni odprti okolici te točke.*

Primer 2.33 Za lokalne koordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$ očitno velja

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0, \qquad 1 \le i, j \le n.$$

Splošneje, če sta v, w konstantni vektorski polji na domeni v $\mathbb{R}^n$ (to je, polji s konstantni koeficienti), potem je $[v, w] = 0$.

Primer 2.34

$$v = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad w = \frac{\partial}{\partial x_1} + h(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad [v, w] = \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Algebraične lastnosti komutatorja: Če sta v in w $\mathscr{C}^r$-vektorski polji, $r \geq 2$, potem je njun komutator $[v, w]$ vektorsko polje razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ in velja:

1. Operacija je $\mathbb{R}$-linearna v obeh faktorjih:

$$\begin{aligned}
&[v_1 + v_2, w] = [v_1, w] + [v_2, w] \\
&[v, w_1 + w_2] = [v, w_1] + [v, w_2] \\
&[tv, w] = t\,[v, w], \quad t \in \mathbb{R} \\
&[v, tw] = t\,[v, w], \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. Za vsako gladko funkcijo f velja $[fv, w] = f\,[v, w] - w(f)\,v$.
3. $[v, w] + [w, v] = 0$ (v posebnem: $[v, v] = 0$).
4. **Jacobijeva identiteta:**

$$\big[[u, v], w\big] + \big[[w, u], v\big] + \big[[v, w], u\big] = 0.$$

Označimo z $\aleph(X)$ množico vseh gladkih vektorskih polj na gladki mnogoterosti X. Očitno je $\aleph(X)$ realen vektorski prostor. Opremljen z operacijo $[\cdot, \cdot]$ je $\aleph(X)$ *Liejeva algebra.*

Trditev 2.35 *Če je $f : X \to Y$ gladek difeomorfizem in sta v, w vektorski polji na X, potem velja*

$$f_*[v, w] = [f_*v, f_*w].$$

Torej je komutator neodvisen od izbire koordinat.

Dokaz Izberimo gladko funkcijo g na Y. Po definiciji potiska f_*v velja

$$(f_*v)_{f(x)}(g) = v_x(g \circ f).$$

(Leva stran je vrednost vektorskega polja f_*v na funkciji g v točki $f(x)$, desna stran pa vrednost polja v na funkciji $g \circ f$ v točki x.) Zgornjo identiteto lahko zapišemo v obliki

$$(f_*v)(g) \circ f = v(g \circ f).$$

Z večkratno uporabo tega dejstva dobimo:

$$\begin{aligned}
f_*[v,w](g)\circ f &= [v,w](g\circ f)\\
&= v(w(g\circ f)-w(v(g\circ f))\\
&= v((f_*w)(g)\circ f)-w((f_*v)(g)\circ f)\\
&= (f_*v)(f_*(w)(g)\circ f-(f_*w)(f_*v)(g)\circ f\\
&= (f_*v)(f_*(w)(g)\circ f-(f_*w)(f_*v)(g)\circ f\\
&= [f_*v,f_*w](g)\circ f.
\end{aligned}$$

Ker to velja za vsako gladko testno funkcijo g na Y, sledi $f_*[v,w]=[f_*v,f_*w]$. $\square$

Opomba 2.36 Trditev 2.40 lahko posplošimo:
Če sta v,w vektorski polji na X in sta $\tilde{v},\widetilde{w}$ vektorski polji na Y, tako da za neko gladko preslikavo $f\colon X\to Y$ velja $df_xv_x=\tilde{v}_{f(x)}$ in $df_xw_x=\widetilde{w}_{f(x)}$, sledi

$$df_x[v,w]_x=[\tilde{v},\widetilde{w}]_{f(x)}.$$

2.6 Liejev odvod vektorskega polja

Naj bosta v in w vektorski polji na gladki mnogoterosti X. Označimo s $\phi_t(x)$ tok polja v. Vemo, da je družina $\{\phi_t\}$ lokalna grupa difeomorfizmov mnogoterosti X.

Definicija 2.37 *Liejev odvod vektorskega polja w v smeri vektorskega polja v v točki $x\in M$ je definiran s predpisom*

$$(L_vw)_x\overset{def}{=}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\phi_t^*w=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((\phi_t^*w)_x-w_x\big)\in T_xX.$$

Iz definicije sledi, da je L_vw vektorsko polje, ki je odvod vektorskega polja w vzdolž toka vektorskega polja v.
Definicijo lahko posplošimo na primer, ko je w tenzorsko polje poljubnega tipa. Če je $w=f$ funkcija na M, je Liejev odvod enak

$$(L_vf)_x=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}f(\phi_t(x))=v(f)(x)=df_xv_x,$$

torej je ravno diferencial funkcije f v smeri vektorja v.

Primer 2.38 Naj bodo $x=(x_1,\ldots,x_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$ in $v=\frac{\partial}{\partial x_1}$. Njegov tok

$$\phi_t(x_1,\ldots,x_n)=(x_1+t,x_2,\ldots,x_n)$$

je paralelni premik v koordinatni smeri x_1. Diferencial $d\phi_t\colon T_x\mathbb{R}^n\to T_{\phi_t(x)}\mathbb{R}^n$ preslika tangentni vektor $w=\sum_j w_j\frac{\partial}{\partial x_j}|_x\in T_x\mathbb{R}^n$ v vektor $\sum_j w_j\frac{\partial}{\partial x_j}|_{\phi_t(x)}\in T_{\phi_t(x)}\mathbb{R}^n$.

Izberimo vektorsko polje
$$w=\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$
Tedaj je
$$(\phi_t^* w)_x = (d\phi_{-t})_{\phi_t(x)} w_{\phi_t(x)} = \sum_{j=1}^{n} b_j(x_1+t, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x$$
in zato je Liejev odvod enak
$$L_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j}{\partial x_1}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, w\right]. \tag{2.9}$$
V tem primeru je torej Liejev odvod enak komutatorju. □

Trditev 2.39 *Za vsak par vektorskih polj v, w velja identiteta*
$$\frac{d}{dt}(\phi_t^* w) = \phi_t^*(L_v w)$$
na fundamentalni domeni polja v, kjer je ϕ_t tok polja v.

Dokaz Pri $t=0$ je to ravno definicija Liejevega odvoda.
Naj bo sedaj $t = s+u$, kjer $s\in\mathbb{R}$ fiksiramo in u spreminjamo. Velja
$$\phi_t^* w = (\phi_s\circ\phi_u)^* w = \phi_u^*(\phi_s^* w).$$
Odvajamo po t pri $t=s$:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=s}\phi_t^* w &= \frac{d}{du}\bigg|_{u=0}\phi_u^*(\phi_s^* w)\\ &= L_v(\phi_s^* w)\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1}{u}(\phi_u^*(\phi_s^* w)-\phi_s^* w)\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1}{u}(\phi_s^*(\phi_u^* w - w))\\ &= \phi_s^*\left(\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}(\phi_u^* w - w)\right)\\ &= \phi_s^*(L_v w).\end{aligned}$$
Upoštevali smo, da linearna preslikava ϕ_s^* komutira z limitnim prehodom. □

Trditev 2.40 *Če je $f\colon X\to Y$ difeomorfizem in sta v, w vektorski polji na X, potem velja*
$$f_*(L_v w) = L_{f_* v}(f_* w)$$

Torej je izračun Liejevega odvoda neodvisen od izbire lokalnih koordinat na X.

Dokaz Naj bo ϕ_t tok polja v na X in $\tilde{\phi}_t$ tok polja $\tilde{v} := f_* v$ na Y. Potem velja

$$f \circ \phi_t = \tilde{\phi}_t \circ f.$$

Pišimo $\widetilde{w} = f_* w$, kar je ekvivalentno $w = f^* \widetilde{w}$. Uporabimo zgornjo identiteto za povlek vektorskega polja $\widetilde{w}$. Po eni strani dobimo

$$(f \circ \phi_t)^* \widetilde{w} = \phi_t^* \circ f^* \widetilde{w} = \phi_t^* w,$$

po drugi strani pa

$$(\tilde{\phi}_t \circ f)^* \widetilde{w} = (f^* \circ \tilde{\phi}_t^*) \widetilde{w}.$$

Ker sta izraza enaka, sledi

$$\phi_t^* w = f^* (\tilde{\phi}_t^* \widetilde{w}).$$

Odvajamo po t pri $t = 0$:

$$L_v w = f^* \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tilde{\phi}_t^* \widetilde{w} \right) = f^* (L_{\tilde{v}} \widetilde{w}).$$

To je očitno ekvivalentno $f_*(L_v w) = L_{\tilde{v}} \widetilde{w}$, kar smo želeli dokazati. □

Sedaj bomo pokazali, da je Liejev odvod enak Liejevemu oklepaju.

Trditev 2.41 *Za vsak par vektorskih vektorskih polj v, w velja*

$$L_v w = [v, w].$$

Dokaz Iz trditev 2.35 in 2.40 sledi, da sta operaciji komutator in Liejev odvod neodvisni od izbire lokalnih koordinat.

Naj bo $p \in X$ taka točka, v kateri je $v_p \neq 0$. Potem obstajajo lokalne koordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$ v okolici točke p, v katerih je polje v enako kooordinatnemu polje $\frac{\partial}{\partial x_1}$. V tem primeru smo željeno enakost že dokazali; glej (2.9).

Naj bo sedaj $p \in X$ taka točka, da velja $v_x = 0$ za vsako točko x v neki okolici točke p. V tem primeru je očitno $[v, w]_p = 0$. Poleg tega tok $\phi_t(x) \equiv x$ na okolici $x \in U$ miruje, zato sledi tudi $L_v w|_p = 0$.

To pomeni, da željena enakost velja na odprti množici $\Omega = \{p \in X : v_p \neq 0\}$ in tudi na notranjosti njenega komplementa $X \setminus \Omega$; torej na komplementu roba $\partial \Omega$. Iz definicij sledi, da sta obe vektorski polji $[v, w]$ in $L_v w$ zvezni. Ker je rob množice Ω nikjer gost v X, sledi enakost v vseh točkah $p \in X$ po zveznosti. □

Posledica 2.42 *Za poljuben par vektorskih polj velja $L_w v = -L_v w$.*

Trditev 2.43 *Naj bo ϕ_t tok polja v in ψ_s tok polja w. Potem velja*

$$L_v w = 0 \iff \phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t.$$

To pomeni, da polji v, w komutirata natanko tedaj, ko njuna tokova komutirata.
Dokaz ($\Leftarrow$) Odvajamo identiteto $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$ po s pri $s = 0$ (t in x sta fiksni):

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \phi_t(\psi_s(x)) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \psi_s(\phi_t(x)) = w_{\phi_t(x)}.$$

Levo stran v zgornji identiteti lahko po verižnem pravilu izrazimo tudi takole:

$$(d\phi_t)_x \cdot \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \psi_s(x) = (d\phi_t)_x \cdot w_x.$$

S primerjavo dobimo

$$d\phi_t|_x w_x = w|_{\phi_t(x)} \iff \phi_t^* w \overset{t}{\equiv} w,$$

kar pomeni, da je polje w ϕ_t-invariantno. Z odvajanjem po t pri $t = 0$ sledi $L_v w = 0$.
($\Rightarrow$) Naj bo $L_v w = 0$. Iz trditve 2.39 sledi

$$\frac{d}{dt}\phi_t^* w = \phi_t^*(L_v w) = \phi_t^*(0) = 0.$$

Torej je vektorsko polje $\phi_t^* w$ neodvisno od t in je zato enako $\phi_0^* w = w$. Za vsak fiksen t torej velja $(\phi_t)_* w = w$. Odtod sledi s pomočjo verižnega pravila, da difeomorfizem ϕ_t preslika poljubno tokovnico $\psi_s(x)$ polja w, ki gre pri $s = 0$ skozi točko x, v drugo tokovnico, ki gre pri $s = 0$ skozi točko $\phi_t(x)$. To ravno pomeni $\phi_t(\psi_s(x)) = \psi_s(\phi_t(x))$. □

Poseben primer: $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $w = \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$, $[v, w] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_1}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$. Torej je $[v, w] = 0$ natanko tedaj, ko koeficienti b_j niso odvisni od spremenljivke x_1:

$$w = \sum_{j=1}^n b_j(x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Evidentno je, da so integralne krivulje translacijsko invariantne v x_1-smer; če je $\psi_s(x)$ neka integralna krivulja polja w, potem je tudi

$$\phi_t(\psi_s(x)) = \psi_s(x) + (t, 0, \ldots, 0) = \psi_s(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)$$

integralna krivulja polja w. □

2.7 Involutivni podsvežnji in Frobeniusov izrek

Izrek 2.44 *Naj bodo $v_1, v_2, \ldots, v_m$ linearno neodvisna vektorska polja na mnogoterosti X, ki paroma komutirajo:*

$$[v_j, v_k] = 0, \qquad j,k = 1,\dots,m.$$

Potem za vsako točko $p \in X$ obstajata odprta okolico $U \subset X$ in lokalna karta $\psi\colon U \to \psi(U) = U' \subset \mathbb{R}^n$, tako da je

$$\psi_* v_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad j = 1,\dots,m.$$

Obratno: če taka karta ψ obstaja, sledi $\psi_*[v_j, v_k] = [\psi_* v_j, \psi_* v_k] = [\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}] = 0.$

Dokaz V neki lokalni karti prevedemo na primer $X = \mathbb{R}^n$, $p = 0$. Naj bo

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad j = 1,\dots,m$$

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo:

$$\det(a_{jk}(0))_{j,k=1}^{m} \neq 0.$$

Odtod sledi, da je $v_1(0),\dots,v_m(0), \frac{\partial}{\partial x_{m+1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ baza tangentnega prostora $T_0\mathbb{R}^n$. Naj bo ϕ_t^j tok polja v_j. Označimo $d = n - m$. Definiramo preslikavo $g(x)$ v okolici izhodišča $x = 0$ s predpisom

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi_{x_1}^1 \circ \dots \circ \phi_{x_m}^m (\underbrace{0,\dots,0}_{m}, x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Torej začnemo v točki $(0,\dots,0,x_{m+1},\dots,x_n)$ in gremo za čas x_j v smeri polja v_j za vsak $j = 1,\dots,m$. Izračunamo odvod po spremenljivki x_1:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi_{x_1}^1 \circ \phi_{x_2}^2 \circ \dots \circ \phi_{x_m}^m (0,\dots,0,x_{m+1},\dots,x_n)) = v_1(g(x))$$

Pri računanju odvoda po x_2 upoštevamo, da polji v_1 in v_2 komutirata:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi_{x_2}^2 \circ \phi_{x_1}^1 \circ \dots \circ \phi_{x_m}^m (\underbrace{0,\dots,0}_{m}, x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Enako kot prej sledi $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x) = v_2(g(x))$. Analogen sklep velja za ostale spremenljivke, torej je

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = v_j(g(x)), \quad j = 1,\dots,m.$$

Torej je $g_* \frac{\partial}{\partial x_j} = v_j, \forall j = 1,\dots,m.$

Ker je $g(0,\dots,0,x_{m+1},\dots,x_n) = (0,\dots,0,x_{m+1},\dots,x_n)$, sledi

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(0) = \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad k = m+1, \dots, n.$$

Torej je diferencial dg_0 neizrojen. Iz izreka o inverzni preslikavi sledi, da je g difeomorfizem v neki okolici točke $0 \in \mathbb{R}^n$. Naj bo $\psi = g^{-1}$ njegov inverz; tedaj je $\psi_* v_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. $\square$

Naj bo X gladka mnogoterost. Za vsak $x \in X$ naj bo $E_x \subset T_x X$ vektorski podprostor v $T_x X$, $\dim E_x = m = \operatorname{rang} E$ (neodvisen od x). Predpostavimo, da je E_x gladko odvisen od $x \in X$.

$$E = \bigsqcup_{x \in X} E_x \subset TX$$

Natančneje, zahtevajmo, da je E *gladek vektorski podsveženj tangentnega svežnja svežnja* TX, kar pomeni naslednje:

Vsaka točka $p \in X$ ima okolico $U \subset X$ in gladko sveženjsko karto $TX|_U \xrightarrow[\theta]{\cong} U \times \mathbb{R}^n$, $n = \dim X$, tako da je

$$\theta(E|_U)] = U \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d), \quad d = n - m.$$

Ekvivalentno: $\forall p \in X$ $\exists U^{okolica}$ in m gladkih vektorskih polj $V_1, \dots, V_m$ na U, tako da je

$$E_x = \operatorname{Lin}\{V_1(x), \dots, V_m(x)\}$$

(V prejšnji definiciji: $V_j(x) = \theta^{-1}(x, (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)))$

Definicija 2.45 *Podmnogoterost M v X je integralna podmnogoterost podsvežnja $E \subset TX$, če je $\forall x \in X$: $T_x M \subset E_x$.*

Od tod sledi $\dim M \leq m = \dim E_x$.

Primer 2.46 $m = 1$. E lokalno definiran z vektorskim poljem V.
Integralna podmnogoterost E je neparametrizirana tokovnica polja E, le da hitrost gibanja ni bistvena.

Obstoj tokovnic vektorskega polja pove, da imamo vselej 1-dimenzionalne integralne podmnogoterosti.

Vprašanje: Kdaj obstajajo lokalne integralne podmnogoterosti M dimenzije $m = \operatorname{rang} E$?

Recimo, da je $M \subset X$ neka integralna podmnogoterost svežnja $E \subset TX$, $\dim M = m = \operatorname{rang} E$. Naj bodo $V_1, \dots, V_m$ vektorska polja, ki napenjajo E na neki odprti množici $U \subset X$.
Trdimo: Vektorsko polje $[V_j, V_k]$ je tudi tangentno na E v točkah iz $U \cap M$.
Dokaz: Naj bodo $g_1, \dots, g_d \colon U \to \mathbb{R}$ lokalne definicijske funkcije $M \cap U$.

$$[V_j,V_k](g_l) = V_j(V_k(g_l)) - V_k(V_j(g_l)), \quad V_k(g_l)|_{M\cap U} = 0, V_j(g_l)|_{M\cap U} = 0$$

$$\Longrightarrow [V_j,V_k](g_l) = dg_l[V_j,V_k] = 0 \text{ v točkah iz } M\cap U.$$

Ker to velja za vsak g_l, $l = 1,\dots,d$, sledi

$$[V_j,V_k]|_x \subset \bigcap_{l=1}^{m} \ker(dg_l)_x = T_xM \quad \forall x \in M\cap U.$$

Odtod sledi, da je komutator $[V_j,V_k]$ linearna kombinacija polj $V_1,\dots,V_m$ na $M\cap U$.

Zaključek: Če ima E integralne mnogoterosti dimenzije $m = \operatorname{rang} E$ skozi vsako točko $x \in X$, mora E zadoščati naslednjemu pogoju:

Definicija 2.47 *Vektorski podsveženj $E \subset TX$ ranga m je involutiven, če ima vsaka točka $p \in X$ okolico $U \subset X$, na kateri je $E|_U$ generiran z gladkimi vektorskimi polji $V_1,\dots,V_m$, tako da je vsak komutator $[V_j,V_k]$ tangenten na $E|_U$.*

Opomba: Ker polja $V_1,\dots,V_m$ generirajo $E|_U$, je pogoj v definiciji ekvivalenten

$$[V_j,V_k] = \sum_{l=1}^{m} a_{jkl}V_l, \qquad j,k = 1,\dots,m$$

za neke gladke funkcije a_{jkl} na U. Preveri, da je involutivnostni pogoj neodvisen od izbire lokalnih vektorskih polj $V_1,\dots,V_m$, ki generirajo E.

Izrek 2.48 (Frobenius) *Če je $E \subset TX$ involutiven podsveženj ranga m, potem lahko X razslojimo na disjunktno unijo podmnogoterosti $M_\alpha \subset X$ dimenzije $\dim M_\alpha = m$, tako da je vsaka M_α integralna podmnogoterost svežnja E.*

Taka razslojitev mnogoterosti na paroma disjunktne podmnogoterosti konstantne dimenzije se imenuje *foliacija*. Posamezna podmnogoterost v foliaciji se imenuje *list* foliacije. Vsak list je vsebovan v nekem natanko določenem maksimalnem listu.

Lokalno: Vsaka točka $p \in X$ ima okolico $U \subset X$ in lokalno karto $\phi : U \xrightarrow{\cong} U' \subset \mathbb{R}^n$, tako da je $d\phi_x(E_x) = \mathbb{R}^m \times \{0\}^d$. Okolica U je tedaj disjunktna unija nivojnic

$$\phi_{m+1}(x) = c_{m+1}, \quad \phi_{m+2}(x) = c_{m+2}, \quad \dots, \quad \phi_n(x) = c_n,$$

kjer so $c_{m+1},\dots,c_n \in \mathbb{R}$ realna števila.

Dokaz Fiksirajmo točko $p \in X$. Izberimo lokalne koordinate $x = (x_1,\dots,x_n)$ v okolici p, v katerih je $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Naj bodo $V_1(x),\dots,V_m(x)$ vektorska polja v okolici izhodišča, ki napenjajo E_x za vsak x. Z linearno zamenjavo koordinat dosežemo $V_j(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_0$ za $j = 1,\dots,m$. Naj bo

$$V_j(x) = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}(x)\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad j = 1,\dots,m.$$

Za levi $m\times m$ minor matrike koeficientov velja $\det(a_{jl})_{j,l}^m \neq 0$ na neki okolici $x=0$ (v točki $x=0$ je to ravno identična matrika). Pomnožimo matriko koeficientov $(a_{jl})_{j=1,\ldots,m}^{l=1,\ldots,n}$ na levi z matriko $(a_{jl})_{j,l=1,\ldots,m}^{-1}$. Dobimo matriko koeficientov oblike

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & 1 & \end{array}\right]$$

Involutivnost se pri zamenjavi baze ohranja. Torej obstajajo vektorska polja oblike

$$W_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{l=m+1}^{n} b_{jl}(x)\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad j=1,\ldots,m, \tag{2.10}$$

ki generirajo E v neki okolici $0\in\mathbb{R}^n$. Ker je sveženj E involutiven, je vsak komutator $[W_j,W_k]$ linearna kombinacija polj $W_1,\ldots,W_m$. Iz (2.10) s preprostim računom sledi, da je komutator $[W_j,W_k]$ linearna kombinacija vektorskih polj $\frac{\partial}{\partial x_l}$, $l=m+1,\ldots,n$. Odtod sledi z uporabo elementarne linearne algebre, da je

$$[W_j,W_k]=0, \quad j,k=1,\ldots,m.$$

Zato obstaja difeomorfizem $x\mapsto g(x)$ v okolici $0\in\mathbb{R}^n$, ki preslika vektorsko polje W_j v koordinatno polje $\frac{\partial}{\partial x_j}$ za vsak $j=1,\ldots,m$; to je, $g_*W_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$. Odtod sledi, da so nivojne ploskve $g_k=c_k$, $k=m+1,\ldots,n$, maksimalne integralne podmnogoterosti svežnja E v neki okolici p. S tem dobimo lokalno razlojitev okolice točke $p\in X$ na integralne podmnogoterosti.

Globalno razslojitev dobimo s topološkimi argumenti (glej npr. [1] ali [3]). □

Primer 2.49 $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$. Naj bo $E\subset T\mathbb{R}^3\cong\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ podsveženj ranga 2. Lokalno je E določen z dvema linearno neodvisnima vektorskima prostoroma V,W. Kot v dokazu Frobeniusovega izreka vidimo:

$$V=\frac{\partial}{\partial x}+a(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}, \quad W=\frac{\partial}{\partial y}+b(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.11}$$

Vsaka integralna ploskev S je graf oblike $z=f(x,y)$ in jo parametriziramo s preslikavo $(x,y)\to(x,y,f(x,y))$. Z odvajanjem po x in y vidimo, da vektorski polji

$$\widetilde{V}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \widetilde{W}=\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.12}$$

vzdolž S napenjata tangentni prostor ploskve S v vsaki točki. Ker vektorski polji V in W (2.11) generirata sveženj E, vidimo iz primerjave izrazov (2.12) in (2.12), da je S integralna ploskev svežnja E natanko tedaj, ko je $V=\widetilde{V}$ in $W=\widetilde{W}$ vzdolž S. To velja natanko tedaj, ko funkcija f zadošča sistemu parcialnih diferencialnih enačb

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x,y,f(x,y)), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b(x,y,f(x,y)).$$

Ker je $f \in \mathscr{C}^2$, sta druga mešana parcialna odvoda enaka:

$$\begin{aligned} f_{xy} &= a_y + a_z f_y = a_y + a_z b \\ f_{yx} &= b_x + b_z f_x = b_x + b_z a \\ f_{xy} - f_{yx} &= a_y - b_x + a_z b - b_z a \equiv 0 \end{aligned}$$

Izračunajmo še komutator vektorskih polj V in W:

$$[V,W] = \left(b_x + ab_z - a_y - ba_z\right)\frac{\partial}{\partial z} = (f_{yx} - f_{xy})\frac{\partial}{\partial z}$$

Ta račun pokaže, da vektorski polji V in W komutirata vzdolž vsake integralne ploskve; torej je neničelnost komutatorja ovira za obstoj integralnih ploskev. $\square$

2.8 Liejeva vrsta toka vektorskega polja

Naj bo V vektorsko polje in ϕ_t njegov tok. Naj bo f gladka funkcija vzdolž tokovnice $\phi_t(x)$.

$$t \mapsto f(\phi_t(x)) \overset{Taylor}{=} f(x) + V_x(f)\cdot t + \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} f(\phi_t(x))\frac{t^2}{2} + \dots$$

$$\frac{d}{dt} f(\phi_t(x)) = df(\phi_t(x))\frac{d\phi_t(x)}{dt} = df_{\phi_t(x)} V_{\phi_t(x)} = V(f)(\phi_t(x))$$

Če f nadomestimo z $V(f)$ dobimo:

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\phi_t(x)) = \frac{d}{dt} V(f)(\phi_t(x)) = V(V(f))(\phi_t(x)) = V^2(f)(\phi_t(x))$$

To je diferencialni operator drugega reda.

$$V = \sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad V(f) = \sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$V(Vf) = \sum_{j,k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{d^k}{dt^k} f(\phi_t(x)) = V^k(f)(\phi_t(x)).$$

Torej:

$$f(\phi_t(x)) = f(x) + V(f)(x)\,t + V^2(f)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + V^k(f)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k).$$

Uporabimo to formulo v primeru, ko je $V = \sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, $f = x_j$ (j-ta koordinata), $\phi_t(x) = (\phi_{t,1}(x), \ldots, \phi_{t,n}(x))$.

$$x_j \circ \phi_t(x) = \phi_{t,j}(x) = x_j + a_j(x)\,t + V(a_j)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + V^{k-1}(a_j)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k),$$

kjer smo uporabili

$$V(x_j) = \sum_{k=1}^n a_k(x)\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = a_j(x).$$

Liejeva vrsta toka je

$$\phi_t(x) = x + V(x)t + V(a)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + V^{k-1}(a)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k).$$

”Se en način, kako pridemo do komutatorja: Naj bo še W vektorsko polje in ψ_s njegov tok.

$$W = \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \psi_s(x) = s + sb(x) + \frac{s^2}{2}W(b)(x) + \ldots$$

$$\begin{aligned}\psi_s(\phi_t(x)) &= \psi_s(x + a(x)t + V(a)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots)\\ &= x + a(x)t + V(a)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + sb(x + a(x)t + \ldots) + \frac{s^2}{2}W(b)(x + a(x)t + \ldots) + \ldots\\ &= x + ta(x) + sb(x) + st\sum_{j=1}^n \frac{\partial b(x)}{\partial x_j}a_j(x) + \ldots + o(t^2, s^2).\end{aligned}$$

Opazimo, da je $\sum_{j=1}^n \frac{\partial b(x)}{\partial x_j}a_j(x) = V(b)(x)$. Odtod sledi

$$\begin{aligned}\psi_s(\phi_t(x)) &= x + ta(x) + sb(x) + stV(b)(x) + o(t^2, s^2)\\ \phi_t(\psi_s(x)) &= x + ta(x) + sb(x) + stW(a)(x) + o(t^2, s^2)\end{aligned}$$

Razlika:

$$\psi_s(\phi_t(x)) - \phi_t(\psi_s(x)) = st\big[V(b)(x) - W(a)(x)\big] + o(t^2, s^2) = st[V,W](x) + o(t^2, s^2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(\psi_s\phi_t(x) - \phi_t\psi_s(x))\bigg|_{s=t=0} = [V,W](x).$$

Domača naloga: Dokaži

$$[V,W](x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_{-\sqrt{t}} \circ \phi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \phi_{\sqrt{t}}(x).$$

Če $\sqrt{t}$ nadomestimo z $\operatorname{sign}(t)\sqrt{|t|}$, potem lahko vzamemo dvostranski odvod.

2.9 Grönwallova lema in ocena razdalje med tokovnicami

V tem razdelku bomo dokazali oceno za razdaljo med dvema tokovnicama vektorskega polja. Glavni rezultat je naslednji.

Izrek 2.50 *Denimo, da je $V = \sum a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ Lipschitzovo vektorsko polje z Lipschitzovo kontanto B na domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:*

$$|a(x) - a(y)| \le B|x - y|, \qquad \forall x, y \in \Omega.$$

Potem za vse pare točk $x, y \in \Omega$ in za vsak $t \ge 0$, za katere je tok $\phi_s(x)$, $\phi_s(y)$ definiran na časovnem intervalu $s \in [0,t]$ in leži v Ω, velja naslednja ocena:

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \le e^{Bt}|x - y|. \tag{2.13}$$

V dokazu bomo uporabili naslednjo lemo.

Lema 2.51 (Grönwall) *Naj bosta $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ zvezni funkciji. Denimo, da za neko število $A \ge 0$ in za vsak $t \in [a,b)$ velja neenakost*

$$f(t) \le A + \int_a^t f(s)g(s)\,ds.$$

Potem velja

$$f(t) \le A \exp\left(\int_a^t g(s)\,ds\right), \quad t \in [a,b).$$

Poseben primer: Če je funkcija g konstanta $g \equiv B \ge 0$, tedaj iz ocene

$$f(t) \le A + B\int_a^t f(s)\,ds, \quad t \in [a,b),$$

sledi ocena

$$f(t) \le Ae^{B(t-a)}.$$

Dokaz Oglejmo si najprej primer $A > 0$. Označimo

$$h(t) = A + \int_a^t f(s)g(s)\,ds.$$

Predpostavka je torej $f(t) \leq h(t)$ za vsak $t \in [a,b)$. Ker je $g(t) \geq 0$, sledi odtod

$$\dot{h}(t) = f(t)g(t) \leq h(t)g(t) \Longrightarrow \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \leq g(t).$$

Z integriranjem dobimo odtod

$$\ln h(t) \leq \ln A + \int_a^t g(s)\,ds$$

in z eksponenciranjem še

$$f(t) \leq h(t) \leq A \exp\left(\int_a^t g(s)ds \right).$$

Z limitnim prehodom $A \searrow 0$ vidimo, da neenakost velja tudi za $A = 0$. $\square$

Dokaz [izreka 2.50] Fiksirajmo točki $x, y \in \Omega$.

$$f(t) \stackrel{def}{=} |\phi_t(x) - \phi_t(y)|$$

$$\phi_t(x) = \underbrace{\phi_0(x)}_{=x} + \int_0^t \frac{d}{ds}\phi_s(x)ds = x + \int_0^t a(\phi_s(x))\,ds$$

$$\phi_t(y) = y + \int_0^t a(\phi_s(y))ds$$

$$\begin{aligned} f(t) = |\phi_t(x) - \phi_t(y)| &\leq |x-y| + \int_0^t |a(\phi_s(x)) - a(\phi_s(y))|ds \\ &\leq |x-y| + \int_0^t B|\phi_s(x) - \phi_s(y)|ds \\ &= |x-y| + \int_0^t Bf(s)ds \end{aligned}$$

Funkcija f zadošča predpostavki Grönwallove leme z $A = |x-y|$ in $B = g$. Sledi ocena $f(t) \leq |x-y|e^{Bt}$, kar je ravno neenakost 2.13. $\square$

2.10 Aproksimacija toka s pomočjo algoritma

V tem razdelku bomo pokazali, da lahko tok $\phi_t(x)$ vektorskega polja približno izračunamo z iteracijami primerno izbrane preslikave. Ta rezultat ima poleg očitne praktične vrednosti tudi velik teoretičen pomen, še posebej v teoriji holomorfnih avtomomorfizmov kompleksnih evkliskih prostorv (glej poglavje 4 v [5]).

Definicija 2.52 *Naj bo* $V = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ *vektorsko polje na odprti množici* $D \subset \mathbb{R}^n$ *in* $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$*. Naj bo* Ω *odprta množica v* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*, tako da je* $D \times \{0\} \subset \Omega$*. Preslikava* $A\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *razreda* $\mathscr{C}^1$*, ki zadošča pogojema*

$$A(x,0) = x, \quad \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{t=0}(x,t) = a(x), \qquad x \in D, \tag{2.14}$$

se imenuje algoritem *za vektorsko polje* V*.*

Iz definicije sledi

$$A(x,t) = x + ta(x) + o(t)$$

za vsak algoritem.

Najpreprostejši algoritem je kar preslikava $(x,t) \mapsto x + ta(x)$, ki je linearna v t.

Izrek 2.53 *Naj bo* V *Lipschitzovo vektorsko polje na domeni* $D \subset \mathbb{R}^n$ *s tokom* ϕ_t*. Naj bo* $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *fundamentalna domena toka. Če je* $A(x,t) = A_t(x)$ *algoritem za polje* V*, potem je za vsako točko* $(x,t) \in \Omega$*,* $t \geq 0$*, preslikava*

$$A_{\frac{t}{N}}^{(N)} \stackrel{def}{=} \underbrace{A_{\frac{t}{N}} \circ \ldots \circ A_{\frac{t}{N}}}_{N\text{-ti iterat}}$$

definirana v okolici točke x *za vsa dovolj velika naravna števila* $N > 0$ *in velja*

$$\phi_t(x) = \lim_{N \to \infty} A_{\frac{t}{N}}^{(N)}(x)$$

Konvergenca je enakomerna na kompaktih v Ω*.*

Dokaz Fiksirajmo točko $p \in \mathbb{R}^n$. Naj bo $t_0 > 0$ tako število, da tok $\phi_t(p)$ obstaja za vsak $t \in [0, t_0]$. Naj bo $C = \{\phi_t(p) \colon t \in [0, t_0]\}$ trajektorija. Izberimo kompaktni množici $L_1 \subset L_2 \subset \mathbb{R}^n$, tako da je $C \subset \mathring{L}_1$ and $L_1 \subset \mathring{L}_2$. Potem obstaja kompaktna okolica $K \subset \mathring{L}_1$ točke p, tako da za vsako točko $x \in K$ in za vse $t \in [0, t_0]$ velja $\phi_t(x) \in L_1$. Iz (2.14) sledi ocena $|\phi_t(x) - A_t(x)| = o(t)$ ko gre $t \to 0$, enakomerno za $x \in L_2$.

Fiksirajmo število $n \in \mathbb{N}$ in izberimo točko $x \in K$. Predpostavimo za trenutek, da orbita

$$y_0 = x,\ y_1 = A_{t/n}(y_0),\ y_2 = A_{t/n}(y_1), \dots, y_n = A_{t/n}(y_{n-1}) \tag{2.15}$$

obstaja in leži v množici L_2. Če je $\beta > 0$ Lipschitzova konstanta polja V na L_2, potem iz izreka 2.50 sledi ocena

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \leq \mathrm{e}^{\beta t}|x - y|.$$

Ker je $\phi_t(x) = \phi_{t/n}^n(x)$, sledi odtod

$$\phi_t(x) - A^n_{t/n}(x) = \sum_{j=1}^{n} \phi^{n-j}_{t/n}\left(\phi_{t/n}(y_{j-1})\right) - \phi^{n-j}_{t/n}\left(A_{t/n}(y_{j-1})\right).$$

Če uporabim oceno 2.13 na vsak člen, dobimo

$$|\phi_t(x) - A^n_{t/n}(x)| \le \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\beta t(n-j)/n} |\phi_{t/n}(y_{j-1}) - A_{t/n}(y_{j-1})| \le n\mathrm{e}^{\beta t} o(t/n).$$

Pri $n \to \infty$ konvergira ta izraz proti 0 enakomerno na $x \in K$. Podobna ocena da

$$|\phi_{kt/n}(x) - A^k_{t/n}(x)| \le k\mathrm{e}^{\beta t} o(t/n), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Z induktivno uporabo te ocene vidimo, da za vsak dovolj velik $n \in \mathbb{N}$ orbita (2.15) obstaja in leži v množici L_2 za vsako točko $x \in K$ in za vsak $t \in [0, t_0]$. □

Primer 2.54 Preslikava

$$A(x,t) = x + ta(x) + tb(x)$$

je algoritem za vsoto $V + W$ vektorskih polj $V = \sum a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, $W = \sum b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Naj bo ϕ_t tok polja V in ψ_t tok polja W. Tedaj je tudi preslikava

$$A(x,t) = \psi_t(\phi_t(x)) = x + ta(x) + tb(x) + o(t)$$

algoritem za vsoto polj $V + W$. Odtod sledi, da je tok θ_t vsote $V + W$ enak

$$\theta_t = \lim_{N\to\infty}\left(\psi_{\frac{t}{N}} \circ \phi_{\frac{t}{N}}\right)^{(N)}.$$

Primer 2.55 Naj bo ϕ_t tok polja V in ψ_t tok polja W. Tedaj je tudi preslikava

$$A_t(x) = \psi_{-\sqrt{t}} \circ \phi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \phi_{\sqrt{t}}$$

algoritem za komutator $[V, W]$. Torej je tok θ_t komutatorja $[V, W]$ enak

$$\theta_t(x) = \lim_{N\to\infty} A^{(N)}_{t/N}(x).$$

Poglavje 3
Vektorski svežnji

3.1 Definicija in primeri

Naj bosta E in X $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti in $\pi\colon E \to X$ surjektivna $\mathscr{C}^r$ preslikava.

Definicija 3.1 *Projekcija $\pi\colon E \to X$ je (realen) vektorski svežen ranga m in razreda $\mathscr{C}^r$, če ima vsako vlakno $E_x = p^{-1}(x)$ strukturo m-dimenzionalnega vektorskega prostora ($E_x \cong \mathbb{R}^m$) in je svežen lokalno trivialen: $\forall x_0 \in X\ \exists U^{okolica} \subset X$ in $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem $\theta\colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^m$:*

$$\begin{tikzcd} \theta\colon \pi^{-1}(U) = E|_U \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & U \times \mathbb{R}^m \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

tako da je za vsak $x \in U$ preslikava $\theta_x\colon E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R}^m$ linearni izomorfizem.
Če $\mathbb{R}^m$ zamenjamo s $\mathbb{C}^m$, dobimo kompleksen vektorski svežen *ranga m nad X.*

Opomba: Iz definicije sledi, da so vektorske operacije na vlaknih (seštevanje in produkt s skalarji) gladko odvisne od bazne točke $x \in U$.

Mnogoterost X se imenuje *bazni prostor* ali *baza* svežnja;
mnogoterost E je *totalni prostor* svežja;
za vsako točko $x \in X$ je $E_x = \pi^{-1}(x)$ *vlakno* svežnja nad x.

Sveženjski atlas na E**:** $\mathscr{E} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha)\colon \alpha \in A\}$, $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $(\theta_\alpha, U_\alpha)$ je sveženjska karta na E. Prehodne preslikave: $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

$$\begin{tikzcd}
& E|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[dl, "\theta_\alpha"'] \arrow[dr, "\theta_\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m & & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m \arrow[ll, "\theta_{\alpha\beta}"']
\end{tikzcd}$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}, \qquad \theta_{\alpha\beta}(x,v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)\,v)$$

Družina funkcij $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_m(\mathbb{R})$ je 1-*kocikel*, torej zadošča pogojem:

$$g_{\alpha\alpha} = I, \quad g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} = I, \quad g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} = I.$$

Tu smo z $I \in GL_m(\mathbb{R})$ označili identično matriko.
Dva sveženjska atlasa na E sta ekvivalentna, če je njuna unija spet sveženjski atlas. Struktura vektorskega svežnja na E je določena z ekvivalenčnim razredom atlasa.

Izrek 3.2 *Za vsak* 1-*kocikel* $(g_{\alpha\beta})$ *na odprtem pokritju* $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *gladke mnogoterosti* X*, ki je podan z gladkimi preslikavami* $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \mapsto GL_m(\mathbb{R})$*, obstaja vektorski sveženj* $E \xrightarrow{\pi} X$ *s sveženjskim atlasom* $\mathscr{E} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha) \colon \alpha \in A\}$ *in s prehodnimi preslikavami*

$$\theta_{\alpha\beta}(x,v) = \big(x, g_{\alpha\beta}(x)\,v\big), \quad x \in U_{\alpha\beta},\ v \in \mathbb{R}^m.$$

Dokaz (Ideja)

$$E = \bigsqcup_{\alpha\in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^m/_\sim$$

$$U_\beta \times \mathbb{R}^m \ni (x,v) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)\,v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^m$$

Naredimo natančno te identifikacije za vsak par indeksov $\alpha, \beta \in A$. Kocikelni pogoj zagotavlja, da je $\sim$ res ekvivalenčna relacija in da je prostor E Hausdorffov.

Sveženjske karte: $U_\alpha \times \mathbb{R}^m \underset{\theta_\alpha}{\overset{\cong}{\rightleftarrows}} E|_{U_\alpha}$.
Preveri, da velja $\theta_{\alpha\beta}(x,v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)\,v)$. $\square$

3.2 Prerezi vektorskega svežnja

Naj bo $\pi \colon E \to X$ vektorski sveženj razreda $\mathscr{C}^r$.

Definicija 3.3 Prerez *vektorskega svežnja* $\pi \colon E \to X$ *je preslikava* $f \colon X \to E$*, ki zadošča pogoju*

$$\pi \circ f = \mathrm{Id}_X.$$

Ekvivalentno, za vsak $x \in X$ je $f(x) \in E_x = \pi^{-1}(x)$ točka v pripadajočem vlaknu nad x.
Prerez je razred $\mathscr{C}^r$,če je $\mathscr{C}^r$ preslikava mnogoterosti X v mnogoterost E. (To ima smisel v primeru ko je sveženj $\pi\colon E \to X$ razreda $\mathscr{C}^r$.)
Prerez $0\colon X \to E$, ki vsaki točki $x \in X$ priredi ničelni element $0_x \in E_x$ vektorskega prostora E_x, se imenuje ničelni prerez.

S pomočjo ničelnega prereza lahko bazo X identificiramo s podmnožico $X_0 = \{0_x\colon x \in X\} \subset E$, ki je prav tako imenuje ničelni prerez.

Prostori prerezov in operacije:
Množico vseh zveznih prerezov $X \to E$ označimo z $\Gamma(X,E)$;
$\Gamma^r(X,E)$ označije množico vseh prerezov razreda $\mathscr{C}^r$.
Za poljubna prereza $f,g \in \Gamma(X,E)$ definiramo vsoto $f+g \in \Gamma(X,E)$ kot vsoto po točkah:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \in E_x \quad \text{(vsota na vlaknu } E_x).$$

Za vsak prerez $f \in \Gamma(X,E)$ in vsako funkcijo $\chi\colon X \to \mathbb{R}$ definiramo prerez $\chi f \in \Gamma(X,E)$ s predpisom

$$(\chi f)(x) = \chi(x) f(x) \in E_x.$$

Torej je $\Gamma(X,E)$ vektorski prostor in modul nad kolobarjem $\mathscr{C}(X)$ zveznih funkcij na X.
Če je $E \to X$ razreda $\mathscr{C}^r$, je $\Gamma^r(X,E)$ modul nad kolobarjem $\mathscr{C}^r(X)$ funkcij razreda $\mathscr{C}^r$.

Prerezi trivialnega svežnja $E = X \times \mathbb{R}^n$ so oblike $f(x) = (x, g(x))$, kjer je $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ preslikava baze X v vlakno $\mathbb{R}^n$. Na ta način prereze trivialnega svežnja pogosto kar identificiramo s preslikavami baze v vlakno:

$$\Gamma(X, X \times \mathbb{R}^n) \cong \mathscr{C}(X,\mathbb{R}^n); \quad \Gamma^r(X, X \times \mathbb{R}^n) \cong \mathscr{C}^r(X,\mathbb{R}^n).$$

Prerezi v lokalni kartah: Naj bo $\mathscr{E} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha)\colon \alpha \in A\}$ sveženjski atlas na E, kjer je $\theta_\alpha\colon E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, s prehodnimi preslikavami

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}, \qquad \theta_{\alpha\beta}(x,v) = \big(x, g_{\alpha\beta}(x)\, v\big).$$

V lokalnih karti $E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ je prerez f podan s funkcijo $f_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Kompatibilitetni pogoji nam povedo:

$$f_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x) f_\beta(x) \quad \forall x \in U_{\alpha\beta}.$$

Velja tudi obratno: Vsaka kolekcija preslikav $f_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ $(\alpha \in A)$, ki zadošča zgornjim pogojem, določa prerez $f\colon X \to E$.

Če je f v nekem atlasu določen s kolekcijo funkcij (f_α) in je prerez f' določen s kolekcijo (f'_α), je vsota $f + f'$ določena s kolekcijo $(f_\alpha + f'_\alpha)$ in je χf določen s kolekcijo (χf_α).

3.3 Morfizmi vektorskih svežnjev

Nad isto bazo X: Naj bosta $\pi\colon E \to X$, $\pi'\colon E' \to X$ $\mathscr{C}^r$ vektorska sveženja nad X. Morfizem razreda $\mathscr{C}^r$ prvega svežnja E v drug sveženj E' je $\mathscr{C}^r$ preslikava $\Phi\colon E \to E'$, ki zadošča pogoju $\pi' \circ \Phi = \pi$, to je, naslednji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, hook] & E \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & E' \arrow[dl, "\pi'"] & \mathbb{R}^{m'} \arrow[l, hook'] \\
& & X & &
\end{tikzcd}$$

in je za vsak $x \in X$ preslikava $\Phi_x\colon E_x \to E'_x$ linearna na vlaknih.

Jedro in slika morfizma:

$$\begin{aligned}
\ker\Phi &= \{v \in E_x\colon x \in X,\ \Phi_x(v) = 0_x \in E'_x\} \subset E \\
\Im\Phi &= \Phi(E) \subset E'.
\end{aligned}$$

Očitno so vlakna $\ker\Phi$ vektorski podprostori v vlaknih svežnja E, vlakna $\mathrm{im}\Phi$ pa so vektorski podprostori v vlaknih svežnja E'. Velja

$$\dim(\ker\Phi_x) + \dim(\mathrm{im}\Phi_x) = m = \mathrm{rang} E, \quad x \in X,$$

toda posamezni dimenziji sta lahko odvisni od točke x.

Vsak morfizem je v lokalnih sveženjskih kartah podan z množenjem z matrično funkcijo.

$$\begin{tikzcd}
E|_U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\theta"'] & E'|_U \arrow[d, "\theta'"] \\
U \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "\tilde{\Phi}", "\theta'\circ\Phi\circ\theta^{-1}"'] & U \times \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{\Phi}(x,v) = (x, \phi(x)\,v), \quad U \ni x \mapsto \phi(x) \in \mathbb{R}^{m\times m} \ m\times m\text{-dimenzionalna matrika}$$

Vprašanje: kdaj je $\ker \Phi$ podsveženj v E? Kdaj je $\operatorname{im}\Phi$ podsveženj v E?

Odgovor: natanko tedaj, ko so vlakna konstantne dimenzije. (Glej vaje.)

Morfizmi vektorskih svežnjev v lokalnih sveženjskih kartah:

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= \{(U_\alpha, \theta_\alpha)\colon \alpha \in A\} &\qquad &\text{sveženjski atlas na } E \\ \mathscr{E}' &= \{(U_\alpha, \theta'_\alpha)\colon \alpha \in A\} &\qquad &\text{sveženjski atlas na } E' \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} E|_{U_\alpha} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\theta_\alpha"', "\cong"] & E'|_{U_\alpha} \arrow[d, "\theta'_\alpha"] \\ U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "\tilde{\Phi}"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^{n'} \end{tikzcd}$$

$$\tilde{\Phi}(x,v) = (x, \phi_\alpha(x)v)$$

$$\phi_\alpha(x) = \text{ matrična } n \times n' \text{ funkcija za } x \in U_\alpha$$

Φ je določena s kolekcijo preslikav

$$\phi_\alpha\colon U_\alpha \to M^{n' \times n} \quad \forall \alpha \in A$$

Kdaj taka kolekcija $\{\phi_\alpha\}$ določa morfizem $\Phi\colon E \to E'$?
Naj bo U_β neka druga množica našega pokritja, $\phi_\beta\colon U_\beta \to M^{n' \times n}$. Zanima nas zveza med ϕ_α in ϕ_β na $U_{\alpha\beta}$. V E:

$$\begin{tikzcd} (x,v) \arrow[d, "\cong"', "\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}"] & \in U_\beta \times \mathbb{R}^n, & x \in U_{\alpha\beta} \\ (x, g_{\alpha\beta}(x)v) & \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

$$g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \mapsto GL_n(\mathbb{R}) \qquad \text{(1-kocikel prehodnih preslikav)}$$

Preslikamo to točko s Φ. V karti U_β je to

$$U_\beta \times \mathbb{R}^n \ni (x,v) \mapsto (x, \phi_\beta(x)v) \in U_\beta \times \mathbb{R}^{n'}.$$

Ta vektor ustreza vektorju $(x, g'_{\alpha\beta}(x)\phi_\beta(x)v)$ v karti $U_\alpha \times \mathbb{R}^{n'}$ za E'. Zaradi identifikacij v svežnju je to isti vektor kot

$$(x,v) \xmapsto[U_\alpha \text{ na } E]{\text{prehod v karto}} (x, g_{\alpha\beta}(x)v) \xmapsto[\text{v karti } U_\alpha]{\Phi} (x, \phi_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x)v)$$

Torej kolekcija matričnih funkcij $\phi_\alpha\colon U_\alpha \to M^{n' \times n}$ določa morfizem $\Phi\colon E \to E'$ (glede na izbrani par atlasov na E, E') natanko tedaj, ko velja

$$g'_{\alpha\beta}(x)\phi_\beta(x) = \phi_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x), \quad \forall x \in U_{\alpha\beta},\ \forall \alpha,\beta \in A.$$

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\phi_\alpha", "(x,v)\mapsto(x,\phi_\alpha(x)v)"'] & & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^{n'} \\
E|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[u, "\theta_\alpha"] \arrow[d, "\theta_\beta"] \arrow[rr, "\Phi"] & & E'|_{U'_{\alpha\beta}} \arrow[u, "\theta_\alpha"'] \arrow[d, "\theta'_\beta"'] \\
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \arrow[uu, bend left=60, "\theta_{\alpha\beta}"] \arrow[rr, "\phi_\beta"] & & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^{n'} \arrow[uu, bend right=60, "\theta'_{\alpha\beta}"']
\end{tikzcd}$$

Morfizem Φ je izomorfizem natanko tedaj, ko je $n = n'$ in $\phi_\alpha \colon U_\alpha \mapsto GL_n(\mathbb{R})$ ter

$$g'_{\alpha\beta}\phi_\beta = \phi_\alpha g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow g'_{\alpha\beta} = \phi_\alpha g_{\alpha\beta}\phi_\beta^{-1}.$$

Od tod vidimo, da 1-kocikla $(g_{\alpha\beta})$ in $(g'_{\alpha\beta})$ (na istem pokritju) določata "isti" sveženj do izomorfizma natančno natanko tedaj, ko obstaja 0-koveriga $\phi_\alpha \colon U_\alpha \mapsto GL_n(\mathbb{R})$, tako da velja $g'_{\alpha\beta} = \phi_\alpha g_{\alpha\beta}\phi_\beta^{-1}$. Včasih označimo $d' = g\Box\phi$ ("twisting cocycle g by the cochain ϕ").

Definiramo kohomološko grupo $H^1(\mathscr{U}, GL_n(\mathbb{R}))$ kot grupo ekvivalenčnih razredov 1-kociklov $g = (g_{\alpha\beta})$ na $\mathscr{U}$, z vrednostmi v $GL_n(\mathbb{R})$, po relaciji $g \sim g' \Leftrightarrow g' = g\Box\phi$ za neko 0-koverigo ϕ. $H^1(\mathscr{U}, GL_n(\mathbb{R}))$ je prostor izomorfnostnih razredov vektorskih svežnjev ranga n na X, ki so trivialni nad vsako množico $U_\alpha \in \mathscr{U}$. Imenuje se *prva Čechova kohomološka grupa na $\mathscr{U}$ s koeficienti v* $GL_n(\mathbb{R})$. Podobno je $H^1(\mathscr{U}, GL_n(\mathbb{C}))$ prostor izomorfnostnih razredov kompleksnih vektorskih svežnjev nad X.
Prva kohomološka grupa mnogoterosti X s koeficienti v $GL_n(\mathbb{C})$ je definirana kot direktna limita

$$H^1(X, GL_n(\mathbb{R})) = \varinjlim{}_{\mathscr{U}} H^1(\mathscr{U}, GL_n(\mathbb{R})),$$

kjer opazujemo prehode na finejša pokritja. Tega pojma ne bomo natančneje definirali (glej literatiro iz kohomološke algebre).
Brez dokaza navedemo naslednji izrek.

Izrek 3.4 *Če je mnogoterost X kontraktibilna, potem je vsak vektorski sveženj $E \to X$ trivialen, to je izomorfen produktnemu svežnju $X \times \mathbb{R}^n$.*

Primer 3.5 $X = \mathbb{S}^n = n$-sfera $= U^+ \cup U^-$, kjer sta $U^\pm$ odprti hemisferi, ki se prekrivata vzdolž ekvatorja. Vsaka od množic $U^\pm$ je difeomorfna odprti n-krogli, torej tudi $\mathbb{R}^n$.
$U^+ \cap U^- \cong \mathbb{S}^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$
$E \to X$ vektorski sveženj ranga m, $E|_{U^+} \cong U^+ \times \mathbb{R}^m$, $E|_{U^-} \cong U^- \times \mathbb{R}^m$.
E določen s prehodno preslikavo g:

$$g\colon U^+ \cap U^- \cong \mathbb{S}^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to GL_m(\mathbb{R})$$

Dejansko je določen že s homotopnim razredom te preslikave, torej s preslikavo $\mathbb{S}^{n-1} \to GL_m(\mathbb{R})$.
V posebnem primeru $n = 2, m = 2$: $\mathbb{S}^1 \to GL_2(\mathbb{R})$: homotopni razredi preslikav $\mathbb{S}^1 \to GL_2(\mathbb{R})$ sestavljajo prvo fundamentalno grupo $\pi_1(GL_2(\mathbb{R})) \cong \pi_1(O(2)) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

Vprašanje: kateremu številu pripada tangentni svežen $T\mathbb{S}^2$ sfere?

Primer 3.6 Univerzalni sveženj.
$G_{k,n}$ mnogoterost vseh k-dimenzionalnih realnih vektorskih podprostorov v $\mathbb{R}^n$
$G_{k,n}$ mnogoterost vseh k-dimenzionalnih kompleksnih vektorskih podprostorov v $\mathbb{C}^n$

$$U_{k,n} = \{(\lambda, v) \in G_{k,n} \times \mathbb{R}^n \colon v \in \lambda\} \subset G_{k,n} \times \mathbb{R}^n$$

Naloga: pokaži, da je $U_{k,n}$ realno analitičen vektorski podsveženj v $G_{k,n} \times \mathbb{R}^n$.
V kompleksnem: $U_{k,n}(\mathbb{C}) \to G_{k,n}(\mathbb{C})$ holomorfen vektorski podsveženj v $G_{k,n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$.
Poseben primer: $G_{1,n+1} = \mathbb{RP}^n$, $G_{1,n+1} = \mathbb{CP}^n$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, hook] & U_{1,n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, hook] & U_{1,n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} U_{1,n+1}(\mathbb{C}) &= \{([z_0\colon \ldots \colon z_n], (v_0, \ldots, v_n)) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \colon z_i v_j = z_j v_i \ \forall i, j\} \\ &= \{[z_0\colon \ldots \colon z_n], (z_0, \ldots, z_n)) \colon (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}_* \} \cup (\text{ničelni prerez}) \end{aligned}$$

Naloga: poišči trivializacijo $U_{k,n}|_{U_j} \cong U_j \times \mathbb{C}$ nad množico

$$U_j = \{[z_0\colon \ldots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n, z_j \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n$$

in prehodne preslikave.

3.4 Podsvežnji in kvocientni svežnji, eksaktna zaporedja, dualni sveženj

Naj bo $E \to X$ vektorski sveženj ranga n nad X. Izberimo število $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Definicija 3.7 *Podmnožica $E' \subset E$ je* vektorski podsveženj ranga *m svežnja E, če je za vsako točko $x \in X$ množica E_x k-dimenzionalen vektorski podprostor v E_x in je E'* lokalno trivialen *v naslednjem smislu: Za vsako točko $p \in X$ obstaja okolica $p \in U \subset X$ in sveženjska karta $\theta\colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$, tako da velja*

$$\theta(E'|_U) = U \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d), \quad n = m + d.$$

Vsaka taka sveženjska karta na E je *izbrana* glede na E'. Kolekcija vseh izbranih sveženjskih kart definira na E' strukturo vektorskega svežnja ranga m nad X.

Analogno definiramo pojem *kompleksnega vektorskega podsvežnja* v kompleksnem vektorskem svežnju.

Naj bo $E' \subset E$ vektorski podsveženj kot zgoraj.

Kvocientni sveženj $E/_{E'}$ je definiran takole:

$$E/_{E'} = \bigsqcup_{x \in X} E_x/_{E'_x}.$$

Če je θ izbrana sveženjska karta na $E|_U$ (glede na E'), potem θ inducira bijekcijo

$$(E/_{E'}|_U) \xrightarrow[\tilde{\theta}]{\cong} U \times \mathbb{R}^d = U \times \underbrace{\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}^m \times \{0\}^d}}_{\mathbb{R}^d}$$

Preslikavo $\tilde{\theta}$ vzamemo za sveženjsko karto na $E'' = E/_{E'}$.
Naloga: Preveri, da tako dobimo sveženjski atlas na E''.

Zaporedje morfizmov

$$0 \longrightarrow E' \xhookrightarrow[\iota]{\text{inkl.}} E \xrightarrow[\tau]{\text{kvoc.}} E'' \longrightarrow 0$$

se imenuje *kratko eksaktno zaporedje morfizmov vektorskih svežnjev*. To pomeni, da je ι injektivna, τ surjektivna in $\ker\tau = \operatorname{im}\iota$.
Zaporedje morfizmov vektorskih svežnjev

$$\cdots \longrightarrow E_{k-1} \xrightarrow{\Phi_{k-1}} E_k \xrightarrow{\Phi_k} E_{k+1} \longrightarrow \ldots$$

je *kompleks*,če so jedra $\ker\Phi_k \subset E_k$ in slike $\operatorname{im}\Phi_{k-1} \subset E_k$ podsvežnji ($\Leftrightarrow$ rang $\Phi_{k,x}$ neodvisen od bazne točke $x \in X$) inče velja

$$\Phi_k \circ \Phi_{k-1} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{im}\Phi_{k-1} = \ker\Phi_k, \quad \forall k.$$

Zaporedje se imenuje *eksaktno*, če velja

$$\ker \Phi_k = \mathrm{im} \Phi_{k-1}, \quad \forall k.$$

Praktično vse "naravne" funktorje na kategoriji *Vec* vektorskih prostorov in linearnih preslikav lahko posplošimo na svežnje. Naj bo Φ nek kovarianten funktor na kategoriji *Vec*:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "l"] & \Phi(V) \arrow[d, "\Phi(l)"] \\ V' \arrow[r, rightsquigarrow] & \Phi(V) \end{tikzcd}$$

Pri kontravariantnem funktorju imamo obrnjene puščice $\uparrow$.
Denimo, da je $E \to X$ vektorski sveženj nad X. Definiramo prirejen sveženj

$$\Phi(E) \to X, \quad \Phi(E) = \bigsqcup_{x \in X} \Phi(E_x).$$

Na primer, vsakemu vektorskemu prostoru V priredimo njegov dualni prostor $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ (prostor linearnih funkcionalov na V). To je kontravarianten funktor:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "l"] & V^* \ni \lambda \circ l \\ V' \arrow[r, rightsquigarrow] & (V')^* \ni \lambda \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dualni sveženj: $E^* = \bigsqcup_{x \in X} E_x^*$.
Vsaki sveženjski karti $\theta \colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ na E priredimo sveženjsko karto v E^*:

$$\theta^* \colon U \times (\mathbb{R}^n)^* = U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E^*|_U$$

$\theta_x^* \colon \{x\} \times (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\cong} E_x^*$ je dual preslikave $\theta_x \colon E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$.
Inverz $(\theta^*)^{-1} \colon E^*|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ je sveženjska karta na E^*.

3.5 Kotangentni sveženj in diferencialne 1-forme

Kotangentni sveženj T^*X gladke mnogoterosti je dualni sveženj tangentnega svežnja TX:

$$T^*X = (TX)^* = \bigsqcup_{x \in X} T_x^* X$$

Modelni primer: $X = \mathbb{R}^n$. Elementi $T_0^*\mathbb{R}^n$ so linearni funkcionali $\lambda \colon T_0\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$T_0\mathbb{R}^n \ni v = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}$$

Vsaka gladka funkcija g v okolici točke 0 v $\mathbb{R}^n$ določa funkcional na $T_0\mathbb{R}^n$ s predpisom

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto v(g) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(0) = dg_0 v.$$

Ta funkcional je torej diferencial dg_0 funkcije g v točki 0.
Če je $g(x) = x_k$, dobimo $\langle dx_k, v\rangle = v(x_k) = v_k$; torej

$$\langle dx_k, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Torej tvorijo diferenciali $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ koordinatnih funkcij bazo kotangentnega prostora $T_0^*\mathbb{R}^n$, ki je dualna standardni bazi $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ tangentnega prostora $T_0\mathbb{R}^n$.
Vsak element $\lambda \in T_0^*\mathbb{R}^n$ je oblike

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j dx_j = d\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right).$$

Diferencialne 1-forme. Prerezi kotangentnega svežnja se imenujejo diferencialne 1-forme. Na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ je vsaka 1-forma oblike

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) dx_j,$$

kjer so $a_j(x)$ funkcije na D.

Integral diferencialne 1-forme po poti $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ $(t \in [0,1])$ je

$$\int \gamma\alpha = \int 0^1 \langle \alpha(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle dt = \int 0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(\gamma(t))\dot{x}_j(t)\right) dt.$$

V klasični analizi je to krivuljni integral vektorskega polja $(a_1(x), \dots, a_n(x))$.

Naj bo $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p \in U$. Zanima nas ekspliciten izraz za dualno preslikavo

$$(df_p)^*\colon T^*_{f(p)}\mathbb{R}^m \longrightarrow T_p^*\mathbb{R}^n$$

diferenciala $df_p\colon T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$. Naj bo $\lambda \in T^*_{f(p)}\mathbb{R}^m$. Po definiciji dualne preslikave je

$$\langle f_p^*(\lambda), v\rangle = \langle \lambda, df_p\, v\rangle.$$

Uporabimo ta predpis na standardni bazi $\lambda = dy_k$, $v = \frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$\left\langle f_p^*(dy_k), \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle dy_k, df_p \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle dy_k, \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p).$$

Odtod sledi razvoj po bazi

$$f_p^*(dy_k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p) dx_i = (df_k)_p = d(y_k \circ f)_p, \quad k = 1, \dots, m.$$

Naj bo $\lambda = \sum \lambda_k dy_k = d(\sum \lambda_k y_k)$. (Vsak kovektor $\lambda \in T^*_{f(p)}\mathbb{R}^m$ je te oblike.)

$$f_p^*(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_p^*(dy_k) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k d(y_k \circ f)_p = d\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k \circ f \right)_p$$

Za linearno funkcijo $g = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k$ smo torej dokazali pravilo

$$f_p^*(dg) = d(g \circ f)_p.$$

Ker lahko vsako funkcijo g v okolici točke $f(p)$ zapišemo kot vsoto

$$g(y) = c + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k + o(|y - f(p)|)$$

za primerno izbrano konstanto c in je tedaj

$$dg_{f(p)} = d(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k),$$

sledi isto pravilo za vsako funkcijo. Situacijo povzamemo v naslednjem diagramu:

$$\begin{tikzcd}
f^*(g) = g \circ f \in \mathscr{C}^\infty_p \arrow[dd, bend right] & g \in \mathscr{C}^\infty_{f(p)} \arrow[l, "f^*"'] \arrow[dd, bend left] \\
T_p\mathbb{R}^n \arrow[r, "df_p", "\text{dual zgornje}"'] & T_{f(p)}\mathbb{R}^m \\
d(g \circ f)_p \in T_p^*\mathbb{R}^n & T_p^*\mathbb{R}^m \arrow[l, "f_p^*"']
\end{tikzcd}$$

Povlek diferencialne forme.
Naj bo $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}^m_y$ gladka preslikava in $\alpha = \sum_{j=1}^{m} a_j(y) dy_j$ diferencialna forma na neki domeni v $\mathbb{R}^m$, ki vsebuje $f(\Omega)$. Povlek $f^*\alpha$ je diferencialna 1-forma na Ω, ki je po točkah definirana s pomočjo zgoraj definirane preslikave

$f_x^*\colon T^*_{f(x)}\mathbb{R}^m \to T^*_x\mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
(f^*\alpha)(x) := f_x^*(\alpha(f(x))) = f_x^*\left(\sum_{j=1}^m a_j(f(x))dy_j\right) &= \sum_{j=1}^m a_j(f(x))f_x^*(dy_j)\\
&= \sum_{j=1}^m a_j(f(x))df_j(x)\\
&= \sum_{j=1}^m a_j(f(x))\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)dx_k\\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_j(f(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)dx_k
\end{aligned}
$$

3.6 Direktna vsota vektorskih svežnjev

Imejmo vektorska svežnja:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, hook] & E \arrow[d, "\pi"] \\
 & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, hook] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\
 & X
\end{tikzcd}
$$

Njuno direktno vsoto $E \oplus E'$ definiramo s predpisom

$$
\begin{tikzcd}
E \oplus E' = \bigsqcup_{x\in X} E_x \oplus E'_x \arrow[d] \\
X
\end{tikzcd}
$$

Torej je vsako vlakno $(E\oplus E')_x = E_x \oplus E'_x$ enako direktni vsoti vlaken E_x in E'_x.

Izberimo pokritje $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ mnogoterosti X, na katerem je E podan z 1-kociklom $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{R})$ in je E' podan z 1-kociklom $g'_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL_m(\mathbb{R})$. Potem je $E \oplus E'$ podan na $\mathscr{U}$ z 1-kociklom

$$
\begin{bmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g'_{\alpha\beta} \end{bmatrix}
$$

Primer 3.8 Trivialen sveženj: $X\times\mathbb{R}^n = (X\times\mathbb{R})\oplus(X\times\mathbb{R})\oplus\ldots\oplus(X\times\mathbb{R})$.

Notranja direktna vsota.
Naj bosta $E', E'' \subset E$ komplementarna vektorska podsvežnja svežnja $E \to X$:

$$\forall x \in X: \quad E'_x + E''_x = E_x \quad \text{in} \quad E'_x \cap E''_x = \{0\}$$

Potem obstaja izomorfizem vektorskih svežnjev

$$\begin{aligned} E' \oplus E'' &\xrightarrow{\cong} E \\ e'_x \oplus e''_x &\mapsto e'_x + e''_x \in E_x. \end{aligned}$$

Dobimo kratko eksaktno zaporedje:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} = 0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr] & E \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & E'' \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[l, bend right, "\psi"'] & 0 \\ & & X & & \end{tikzcd}$$

Trditev 3.9 $E \cong E' \oplus E''$.

Dokaz Konstruirali bomo homomorfizem vektorskih svežnjev $\psi\colon E'' \to E$, ki zadošča
$$\rho \circ \psi = \mathrm{Id}_{E''} \Rightarrow \psi \text{ je injektiven.}$$

Uporabimo particijo enote. Naj bo $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ pokritje X, tako da za vsak α obstaja karta $\phi_\alpha\colon E_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, da velja

$$\phi_\alpha(\tau(E')|_{U_\alpha}) = U_\alpha \times (\mathbb{R}^{n'} \times \{0\}^{n-n'}).$$

(Torej je ϕ_α izbrana sveženjska karta za podsveženj $\tau(E')$ svežnja E.) Naj bo $n' + n'' = n$. Definiramo

$$F_\alpha := \phi_\alpha^{-1}\left(U_\alpha \times (\{0\}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''})\right) \subset E|_{U_\alpha}.$$

To je podsveženj svežnja $E|_{U_\alpha}$, za katerega velja

$$\tau(E')|_{U_\alpha} \oplus F_\alpha = E|_{U_\alpha}.$$

Zožitev $\rho\colon F_\alpha \xrightarrow{\cong} E''|_{U_\alpha}$ je očitno izomorfizem. Definiramo $\psi_\alpha := (\rho|_{F_\alpha})^{-1}$.
Sedaj izberemo particijo enote χ_α podrejeno pokritju $\{U_\alpha\}$:

$$\chi_\alpha\colon X \to [0,1], \quad \mathrm{supp}(\chi_\alpha) \subset U_\alpha, \quad \sum_\alpha \chi_\alpha = 1$$

Definiramo preslikavo $\psi\colon E'' \to E$ s predpisom

$$\psi = \sum \alpha \chi_\alpha \psi_\alpha, \qquad \psi(e''_x) = \sum \alpha \chi_\alpha(x) \psi_\alpha(e''_x) \quad (e''_x \in E''_x).$$

Ker je na vsakem vlaknu ψ linearna kombinacija linearnih preslikav, je linearna. Poleg tega je

$$\rho(\psi(e''_x)) = \sum_\alpha \chi_\alpha(x)\rho(\psi_\alpha(e''_x)) = e''_x,$$

torej je $\rho \circ \psi = \mathrm{Id}|_{E''}$.
Drugi dokaz: s pomočjo particije enote konstruiramo na E polje skalarnih produktov na vlaknih E_x:

$$E_x \times E_x \xrightarrow{g_x} \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto g_x(v,w)$$

V lokalni karti $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ vzamemo standardni evklidski skalarni produkt. Polje skalarnih produktov na vsem svežnju definiramo s predpisom

$$g = \sum_\alpha \chi_\alpha g_\alpha$$

kjer je $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ particija enote kot zgoraj.
Naj bo $F \subset E$ ortogonalni komplement podsvežnja $\tau(E') \subset E$. Potem je zožitev $\rho_F\colon F \to E''$ bijektivna, torej njen inverz $\psi = (\rho_F)^{-1}\colon E'' \to E$ zadošča $\rho \circ \tau = \mathrm{Id}|_{E''}$.
Sedaj imamo v E dva vektorska podsvežnja $\tau(E') \cong E'$ in $\psi(E'') \cong E''$. Ker je $\ker\rho = \tau(E')$ in je $\rho\colon \psi(E'') \to E''$ izomorfizem, sledi, da sta ta dva podsvežnja komplementarna. Torej je

$$E \cong \tau(E') \oplus \rho(E'') \cong E' \oplus E''.$$

S tem je dokaz zaključen. $\square$

3.7 Normalni sveženj podmnogoterosti in izrek o cevastih okolicah

Naj bo $M \subset X$ gladka podmnogoterost mnogoetrosi X. Njen tangentni sveženj TM je podsveženj zožitve $TX|_M$ tangentnega svežnja X na podmnogoterost M. Kvocientni sveženj $TX|_M/_{TM} = N_{M/X}$ imenujemo *normalni sveženj* M v X. Imamo torej kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov svežnjev

$$0 \to TM \hookrightarrow TX|_M \to TX|_M/TM = N_{M/X} \to 0.$$

Po prejšnji trditvi obstaja vložitev $N_{M/X} \overset{\phi}{\hookrightarrow} TX|_M$ in je

$$TM \oplus N_{M/X} \cong TX|_M.$$

Če izberemo na tangentnem svežnju TX polje skalarnih produktov g (Riemannovo metriko), lahko predstavimo normalni sveženj $N_{M/X}$ kot ortogonalni komplement tangentnega svežnja TM v tangentnem svežnju $TX|_M$ ambientne mnogoterosti, zoženem na M:

$$TX|_M = TM \oplus_{\perp g} N_{M/X}$$

Izrek 3.10 (Obstoj cevaste okolice) *Če je M gladka podmnogoterost v gladki mnogoterosti X, potem ima M neko odprto okolico $\Omega \subset X$, ki je difeomorfna neki odprti okolici $U \subset N_{M/X}$ ničelnega prereza v normalnem svežnju M v X.*

Izrek je zelo pomemben v uporabah, saj nam omogoča redukcijo problemov v neki okolici M v X na ustrezne probleme v normalnem svežnju $N = N_{M/X}$, kjer pa imamo linearno strukturo in se problemi pogosto poenostavijo.

V nadaljevanju označimo $N = N_{M/X}$. Okolico U v izreku lahko izberemo tako, da so njena vlakna U_x $(x \in M)$ konveksne množice v vlaknih N_x, npr. krogle polmera $r(x) > 0$ v neki metriki na N. S pomočjo nelinearne dilacije v vlaknih (npr. z uporabo funkcije tangens) lahko totalni prostor N preslikamo difeomorfno na U.

Če ima U konveksna vlakna, je družina preslikav

$$\tau_t : U \to U \ (t \in [0,1]), \quad \tau_t(x,e) = (x,te) \ \forall e \in U_x$$

homotopija množice U na ničelni prerez. Velja

$$\tau_1 = \mathrm{Id}_U, \quad \tau_0 = (x,0) = 0_x, \quad \tau_t(x,0) = (x,0),$$

torej homotopija miruje na ničelnem prerezu. Taki homotopiji pravimo *deformacijska retrakcija U* na ničelni prerez.

Posledica 3.11 *Če je $M \subset X$ vložena podmnogoterost, potem ima M bazo okolic $\Omega \subset X$, tako da je M deformacijska retrakcija vsake od teh okolic.*

Dokaz [izreka 3.10] Prvi primer: $X = \mathbb{R}^n$, $\dim M = m$, $d = n - m = \operatorname{rang} N$, kjer je $N = N_{M/\mathbb{R}^n}$. $M \times \mathbb{R}^n = T\mathbb{R}^n|_M = TM \oplus N$, $N \subset M \times \mathbb{R}^n$. Za vsako točko $x \in M$ označimo z $0_x \in N_x$ ničelni element vektorskega prostora N_x (to je vlakno normalnega svežnja nad točko x). Preslikava $M \ni x \to 0_x \in N$ je difeomorfizem mnogoterosti M na ničelni prerez $M_0 = \{0_x \colon x \in M\} \subset N$ normalnega svežnja. (Običajno mnogoterost M kar identificiramo z ničelnim prerezom M_0 v normalnem svežnju N.) Vlakno N_x je vektorski podprostor v $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, torej lahko vsak element $e_x \in N_x$ razumemo kot vektor v $\mathbb{R}^n$. Definiramo preslikavo

$$\Phi \colon N \to \mathbb{R}^n, \qquad \Phi(e_x) = x + e_x \quad \forall e_x \in N_x.$$

Očitno je $\Phi(0_x) = x$ za vsak $0_x \in M_0$; torej je $\Phi \colon M_0 \to M$ difeomorfizem, ki je inverz od $x \to 0_x$. (Pri identifikaciji $M \cong M_0$ je $\Phi|_M = \mathrm{Id}_M$.)

Diferencial preslikave Φ v točki $0_x \in N_x$ je linearna preslikava

$$(d\Phi)_{0_x} \colon T_{0_x}N \to T_x\mathbb{R}^n.$$

Tangentni prostor $T_{0_x}N$ je direktna vsota tangentnega prostora $T_{0_x}M_0$ ničelnega prereza M_0 (t.i. "horizontalna komponenta") in tangentnega prostora $T_{0_x}N_x$ na vlakno N_x (t.i. "vertikalna komponenta"). Ker je N_x vektorski prostor, lahko tangentni prostor $T_{0_x}N_x$ identificiramo z N_x. Torej imamo

$$T_{0_x}N = T_{0_x}M_0 \oplus T_{0_x}N_x \cong T_xM \oplus N_x.$$

Ker je $\Phi|_M = \mathrm{Id}_M$, je

$$d\Phi_{0_x} \colon T_xM \xrightarrow{\mathrm{Id}} T_xM \subset T_x\mathbb{R}^n.$$

Oglejmo si še vertikalno komponento. Iz predpisa $\Phi(e_x) = x + e_x$ sledi, da je za fiksen x preslikava $N_x \ni e_x \mapsto \Phi(e_x)$ linearni izomorfizem N_x na afin podprostor $x + N_x \subset \mathbb{R}^n$, ki ga identificiramo z vektorskim podprostorom $N_x \subset T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. Diferencial linearne preslikave je kar enak tej preslikavi, torej je

$$d\Phi_{0_x} \colon N_x \to N_x \subset T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

linearni izomorfizem.

Povzetek: diferencial $d\Phi_{0_x} \colon T_{0_x}N \xrightarrow{\cong} T_x\mathbb{R}^n$ preslika horizontalno komponento $T_{0_x}M_0$ izomorfno na tangentni prostor $T_xM \subset \mathbb{T}_x\mathbb{R}^n$ in preslika vertikalno komponento $T_{0_x}N_x \cong N_x$ izomorfno na normalni prostor $N_x \subset T_x\mathbb{R}^n$. Ker sta slednja dva prostora komplementarna, sledi, da je $d\Phi_{0_x}$ linearni izomorfizem.

Iz izreka o inverzni preslikavi sledi, da je Φ lokalni difeomorfizem v neki okolici $\Omega_0 \subset N$ ničelnega prereza M_0.

Sedaj je potrebno najti manjšo odprto okolico Ω, $M_0 \subset \Omega \subset \Omega_0$, tako da je $\Phi \colon \Omega \to\subset \mathbb{R}^n$ injektivna in zato difeomorfizem na svojo sliko $\Phi(\Omega) = \Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$. Obstoj take okolice sledi iz naslednje leme, ki jo uporabimo za primer $X = \mathbb{R}^n$, $X_0 = M$, $Y = N$, $Y_0 = M_0$.

Lema 3.12 *Naj bo $\Phi \colon Y \to X$ gladka preslikava in $Y_0 \subset Y$ ter $X_0 \subset X$ podmnogoterosti, tako da veljata naslednji lastnosti:*

1. *$\Phi \colon Y_0 \to X_0$ je difeomorfizem, in*
2. *za vsako točko $y \in Y_0$ je diferencial $d\Phi_y \colon T_yY \to T_{\Phi(y)}X$ linearni izomorfizem.*

Tedaj obstaja odprta okolica $\Omega \subset Y$ podmnogoterosti Y_0, tako da je $\Phi \colon \Omega \to \Phi(\Omega) \subset X$ difeomorfizem.

Dokaz Lemo bomo dokazali v primeru, ko je Y_0 kompaktna. Dokaz za splošen primer je podoben, le da je tehnično zahtevnejši.

Recimo, da Φ ni injektivna v nobeni okolici podmnogoterosti Y_0. Tedaj obstaja zaporedji $a_j, b_j \in Y$, ki konvergirata proti Y_0, tako da za vsak indeks j velja $a_j \neq b_j$ in $\Phi(a_j) = \Phi(b_j)$. S prehodom na podzaporedje dobimo konvergentni zaporedji $a_j \to a_0 \in Y_0$, $b_j \to b_0 \in Y_0$. Odtod sledi po zveznosti

$$\Phi(a_0) = \lim \Phi(a_j) = \lim \Phi(b_j) = \Phi(b_0).$$

Ker je Φ injektivna na Y_0, sledi $a_0 = b_0$. To je protislovje, saj je Φ difeomorfizem na neki okolici $U \subset Y$ točke a_0, za vse dovolj velike j pa velja $a_j, b_j \in U$, $a_j \neq b_j$ in $\Phi(a_j) = \Phi(b_j)$. $\square$

S tem je izrek 3.10 dokazan v primeru $X = \mathbb{R}^n$.

V splošnem primeru izrek dokažemo na enega od naslednjih dveh načinov:

1. z vložitvijo $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ reduciramo na prejšnji primer;
2. metoda sprejev, ki deluje splošno na vseh mnogoterostih.

Dokaz s pomočjo prve metode prepustimo bralcu.

Oglejmo si sedaj dokaz z drugo metodo, kjer bomo uporabili tokove vektorskih polj. Izberemo gladka vektorska polja $V_1, \ldots, V_m$ na X, ki generirajo tangentni prostor T_xX v poljubni točki $x \in X$. Naj bo ϕ_t^j tok polja V_j. Preslikava

$$F(x, t_1, \ldots, t_m) = \phi_{t_1}^1 \circ \cdots \circ \phi_{t_m}^m(x), \qquad x \in X,\ t_j \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

je definirana in gladka na neki odprti okolici U množice $X \times \{0\}^m$ v trivialnem svežnju $X \times \mathbb{R}^m$ ter zadošča naslednjim lastnostim:

$$F(x,0) = x, \quad \frac{\partial}{\partial t_j}\bigg|_{t_0} F(x,t) = V_j(x), \qquad x \in X,\ j = 1, \ldots, m.$$

Ker vektorji $V_1(x), \ldots, V_m(x)$ napenjajo tangentni prostor T_xX v vsaki točki, je F submerzija vzdolž $X \times \{0\}^m$. Torej je za vsak $x \in X$ preslikava

$$\Theta_x = \frac{\partial}{\partial t_j}\bigg|_{t_0} F(x,t) : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_xX \tag{3.2}$$

linearna in surjektivna. Preslikava $\Theta\colon X \times \mathbb{R}^m \to TX$, ki je na vlaknu $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ enaka Θ_x, je torej epimorfizem vektorskih svežnjev.

Naj bo $E' \subset M \times \mathbb{R}^m$ podmnožica z vlakni

$$E'_x = \Theta_x^{-1}(T_xM), \quad x \in M.$$

Preprosto je videti, da je E' gladek vektorski podsvežnej trivialnega svežnja $M \times \mathbb{R}^m$.

Naj bo $E \subset M \times \mathbb{R}^m$ nek komplementarni podsvežnej, tako da je $M \times \mathbb{R}^m = E \oplus E'$. Homomorfizem $\Theta\colon M \times \mathbb{R}^m \to TX|_M$ tedaj inducira izomorfizem $\Theta\colon E \xrightarrow{\cong} \nu$ svežnja E na normalni svežnej $\nu = N_{M/X}$.

Oglejmo si sedaj preslikavo $\Phi := F|_{E \cap U} : E \cap U \to X$. Označimo z $0_x \in E_x$ ničelni element vlakna E_x. Očitno velja $\Phi(0_x) = F(x)$ za vsak $x \in M$, torej Φ preslika ničelni prerez $E_0 \subset E$ difeomorfno na podmnogoterost $M \subset X$. Trdimo, da je za vsako točko $x \in M$ diferencial

$$d\Phi_{0_x} : T_{0_x}E \to T_xX$$

linearni izomorfizem. Najprej opazimo, da je

$$T_{0_x}E = T_{0_x}E_0 \oplus E_x$$

direktna vsota horizontalnega podprostora $T_{0_x}E_0$ (tangentni prostor na ničelni prerez E_0) in vertikalnega podprostora (tangentni prostor na vlakno E_x; ker je E_x vektorski prostor, lahko $T_{0_x}E_x$ identificiramo z E_x). Ker je $\Phi\colon E_0 \to M$ difeomorfizem, je

$$d\Phi_{0_x}\colon T_{0_x}E_x \to T_xM$$

izomorfizem. V normalnih smereh E_x pa po konstrukciji velja $d\Phi_{0_x} = \Theta_x$, torej dobimo izomorfizem $E_x \to \nu_x$. S tem je trditev dokazana.

Zaključek dokaza sledi tako kor prej iz leme 3.12. □

Poglavje 4

Integracija diferencialnih form in Stokesov izrek

4.1 Diferencialne forme na domenah v $\mathbb{R}^n$

4.2 Integral diferencialne forme

Poglavje 5
Transverzalnost

5.1 Sardov izrek

Definicija 5.1 *Naj bo $f\colon M^m \to N^n$ $\mathscr{C}^r$-preslikava, $r \geq 1$. Točka $q \in N$ je* regularna vrednost *preslikave f, če za vse točke $p \in f^{-1}(q)$ velja*

$$\mathrm{rang}_p f = \mathrm{rang}(df_p\colon T_pM \to T_qN) = n = \dim N.$$

Vsaka točka $q \in N \setminus f(M)$ je regularna vrednost f (pogoj je na prazno izpolnjen). Točka $q \in N$, ki ni regularna vrednost f, se imenuje kritična vrednost*.*

Opomba 5.2
1. Če je $m < n$, potem je $q \in N$ regularna točka f natanko tedaj, ko $q \notin f(M)$.
2. Če je $m \geq n$, potem je $q \in N$ regularna točka f natanko tedaj, ko bodisi $q \notin f(M)$ bodisi $q \in f(M)$ in je f submerzija v vsaki točki $p \in f^{-1}(q)$.

Definicija 5.3 *Točka $p \in M$ je kritična točka f, če* $\mathrm{rang}_p f < n = \dim N$.

Torej je $q \in N$ kritična vrednost f natanko tedaj, ko obstaja točka $p \in f^{-1}(q)$, ki je kritična točka f.

Zanima nas, kako velika (majhna) je množica kritičnih vrednosti.

Izrek 5.4 (Sard, 1942) *Naj bo $f\colon M^m \to N^n$ $\mathscr{C}^r$-preslikava, pri čemer je $r \geq \max\{0, m-n\} + 1 \geq 1$. Potem ima množica njenih kritičnih vrednosti mero 0 v N in je prve kategorije (to je unija največ števno mnogo zaprtih nikjer gostih podmnožic).*

Izrek z drugimi besedami: Skoraj vsaka točka $q \in N$ je regularna vrednost f.

Poseben primer: $m < n$, $f\colon M^m \to N^n \Rightarrow$ množica $f(M)$ ima mero 0 v N (H. Whitney, 1936).

Posledica 5.5 *Za skoraj vsak $q \in N$ je $f^{-1}(q)$ prazna ali pa podmnogoterost v M.*

Izrek 5.6 (Baire) *V polnem metričnem prostoru je množice prve kategorije brez notranjosti.*

Ekvivalentno: števni presek odprtih povsod gostih množic je povsod gost (množica 2. kategorije).
"Generična točka" pomeni točko iz neke množice 2. kategorije v Baireovem prostoru (ki je lahko odvisna od konkretne situacije).
Sardov izrek lahko torej povemo z besedami: *Generična točka $q \in N$ je regularna vrednost gladke preslikave $f\colon M \to N$.*

Glavni posebni primer: $N = \mathbb{R}$. V tem primeru je to Morsejeva lema*:*

Lema 5.7 (Morse, 1939) *Če je $f\colon M^m \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $\mathscr{C}^m$, potem je množica $f(\mathrm{Crit} f) \subset \mathbb{R}$ prve kategorije in ima mero 0.*

Dokaz Dovolj je lemo dokazati za primer, ko je M zaprta krogla (ali zaprt kvader) v $\mathbb{R}^m$. Mnogoterost M lahko pokrijemo s končno ali števno podmnožicami, ki so difeomorfne zaprti krogli (ali zaprtemu kvadru) v $\mathbb{R}^m$. Dokazovane lastnosti (mera 0, 1. kategorija) dopuščajo števne unije.

Naj bo torej $M = \overline{B} \subset \mathbb{R}^m$ in $f(x_1, \ldots, x_m)$ funkcija razreda $\mathscr{C}^m$ na M.

Indukcija na m.

$m = 1$: $\overline{B}$ zaprt interval v $\mathbb{R}$.
$\mathrm{Crit} f = \{x \in \overline{B}\colon f'(x) = 0\}$ je zaprta, kompaktna. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f' zvezna in zato enakomerno zvezna, $\exists \delta > 0$, da za $x, x' \in \overline{B}$, $|x - x'| < \delta$ velja $|f'(x) - f'(x')| < \varepsilon$. Če vzamemo $x \in \mathrm{Crit} f$, je $f'(x) = 0$ in zato $|f'(x)| < \varepsilon$.
Pokrijemo $\mathrm{Crit} f$ s končno mnogo intervali $I_1, \ldots, I_n$, dolžine $|I_j| < \delta$, $I_j \cap \mathrm{Crit} f \neq \emptyset$. Zanima nas ocena za dolžino $|f(I_j)|$ (dolžina slike). $\forall x \in I_j$ velja po Lagrangeu $|f(x') - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x|$ kjer je $\xi \in I_j$ neka vmesna točka. $\xi - x < \delta$ ker je $|I_j| < \delta$ in $x \in \mathrm{Crit} f \Rightarrow |f'(\xi)| < \varepsilon$. Torej dobimo $|f(x') - f(x)| < \varepsilon\delta$ $\forall x' \in I_j \Rightarrow |f(I_j)| \leq \varepsilon\delta$. "Stevilo potrebnih intervalov I_j je $\sim N = \frac{|\overline{B}|}{\delta} \Rightarrow f(\mathrm{Crit} f) \subset \bigcup_{j=1}^{N} f(I_j)$, $|f(\mathrm{Crit} f)| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(I_j)| \leq N \cdot \varepsilon \cdot \delta \lessapprox \frac{|B|}{\delta} \cdot \varepsilon \cdot \delta = |B| \cdot \varepsilon$. To velja za $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |f(\mathrm{Crit} f)| = 0$.
Opomba: popolnoma analogen dokaz v primeru: $f\colon \overline{B} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{C}^1$.

Induktivni korak: $m - 1 \Rightarrow m$.
Recimo, da izrek velja za funkcije na mnogoterostih dim $\leq m - 1$.
Naj bo $I = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ multiindeks, $|I| = i_1 + \ldots + i_m$, $\frac{\partial^{|I|} f}{\partial X^I} = \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{i_m}}$, $|I| \leq m$.

Stratificiramo $\overline{B}$:

$$\overline{B} \supset \Sigma^1 \overset{def}{=} \mathrm{Crit} f \supset \Sigma^2 \supset \ldots \supset \Sigma^m$$

$\Sigma^k \overset{def}{=} \{x \in \overline{B} \colon \dfrac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I}(x) = 0 \; \forall 1 \leq |I| \leq k\}$ (vsi parcialni odvodi f reda 1 do k s 0)

Trdimo, da za vsak $k = 1, 2, \ldots, m-1$ velja:

$$\mathrm{Crit} f = \Sigma^1 \supset S_k \overset{def}{=} \Sigma^k \setminus \Sigma^{k-1} \subset \bigcup_{|I|=k} H_I$$

pri čemer je

$H_I \overset{def}{=} \{x \in \overline{B} \colon \dfrac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I}(x) = 0, d(\partial^I f)(x) \neq 0\}$ (vsaj en parcialen odvod od $\partial^I f$ ni nič)

Sledi

$$S_k \subset \bigcup_{|I|=k} \mathrm{Crit}(f|_{H_I})$$

Dokaz: $x \in S_k \Leftrightarrow \partial^I f(x) = 0 \; \forall |I| \leq k$ in $\exists |J| = k+1$, $\partial^J f(x) \neq 0$.
$J = (j_1, \ldots, j_m)$, recimo da je $j_k > 0$.
$I = (j_1, \ldots, j_k - 1, \ldots, j_m)$
$\Rightarrow x \in H_I$, $\frac{\partial}{\partial x_k}(\partial^I f)(x) = \partial^J f(x) \neq 0$.
Iz definicije H_I sledi, da je H_I gladka (razreda $m - |I| = m - k$) hiperploskev, ki je regularna podmnogoterost (saj je definirana z eno funkcijo $\partial^I f$, ki ima neničeln diferencial vzdolž H_I).
Torej izrek že velja za $f|_{H_I} \colon H_I \to \mathbb{R} \Rightarrow |f(\mathrm{Crit} f|_{H_I})| = 0 \Rightarrow |f(\mathrm{Crit} f \cap S_k)| = 0 \; \forall k = 1, \ldots, m-1$.
Pokazati samo še $|f(\Sigma^m)| = 0$.

$$\mathrm{Crit} f = \Sigma^1 = (\underbrace{\Sigma^1 \setminus \Sigma^2}_{S_1}) \cup (\underbrace{\Sigma^2 \setminus \Sigma^3}_{S_2}) \cup \ldots \cup \Sigma^m = S_1 \cup \ldots \cup S_{m-1} \cup \Sigma^m$$

$|f(S_k)| = 0$, $k = 1, \ldots, m-1$. Na $\sum^m$ so vsi parcialni odvodi f do reda m enaki 0.
$x \in \sum^m$: $f(x') = f(x) + o(|x - x'|^m)$.
Kot prej (za $m = 1$): $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ da je $\forall x \in \sum^m$, $\forall x'$ za katerega velja $|x' - x| < \delta$, velja $|f(x) - f(x')| < \varepsilon \delta^m$. f preslika kroglo $K(x, \delta)$ v interval dolžine $\leq \varepsilon \cdot \delta^m$. Z $N \lessapprox \frac{konst.}{\delta^m}$ kroglami polmera δ pokrijemo množico $\sum^m \Rightarrow |f(\sum^m)| \leq N \cdot \varepsilon \cdot \delta^m \lessapprox \frac{1}{\delta^m} \cdot \varepsilon \cdot \delta^m = \varepsilon \Rightarrow |f(\sum^m)| = 0$.

Dokaz za $N = \mathbb{R}^n$.
1. možnost: podobno kot zgoraj. Začnemo z $n = m$ in indukcija na m, ki narašča. Za $m < n$:

$$M \times \mathbb{R}^{m-n} \supset M \times 0 = M^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n, \qquad |f(M^m)| = 0$$

2. možnost: indukcija na n.
$n=2$: $(f_1,f_2)\colon M\to\mathbb{R}^2$. Za $f_1\colon M\to\mathbb{R}$ izrek že velja, skoraj vsak $c_1\in\mathbb{R}$ je regularna vrednost funkcije f_1. $f_{2\{f_1=c_1\}}$ ima skoraj vsak $c_2\in\mathbb{R}$ za regularno vrednost. Za tako izbrana c_1,c_2 je $(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2$ regularna vrednost $f=(f_1,f_2)$. Ta argument pokaže, da je množica regularnih vrednosti (c_1,c_2) povsod gosta v $\mathbb{R}^2$. Če je M kompaktna, je ta množica tudi odprta (Crit$f$ je zaprta, zato kompaktna $\Rightarrow f(\mathrm{Crit} f)$ kompaktna). Ker je $\forall M$ števna unija kompaktnih domen v M, je $f(\mathrm{Crit} f)$ števna unija zaprtih, nikjer gostih množic (1. kategorije).

Splošen primer: $M=\bigcup\limits_j B_j$, $N=\bigcup\limits_j D_j$, $\overline{B}_j$ kompakt, $\overline{D}_j$ kompakt, $f(\overline{B}_j)\subset D_j$. Lahko vzamemo, da je $\overline{B}_j$ kompaktna množica v $\mathbb{R}^m$ in $\overline{D}_j\approx$ kompaktna množica v $\mathbb{R}^n$.

$$f(\mathrm{Crit} f)=\bigcup_j f(\mathrm{Crit} f|_{\overline{B}_j})$$

za to pa že vemo, da so 1. kategorije, torej mere 0. $\square$

5.2 Transverzalnost

Naj bodo M in $Z\subset N$ gladke mnogoterosti, vsaj $\mathscr{C}^1$, Z podmnogoterost v N in $f\colon M\to N$ gladka preslikava, $x\in M$, $f(x)\in Z$.

Definicija 5.8 *$f\pitchfork_x Z$ (f je v točki x transverzalna na Z) $\Leftrightarrow df_x(T_xM)+T_{f(x)}Z=T_{f(x)}N$.*

$f\pitchfork Z\Leftrightarrow f\pitchfork_x Z\ \forall x\in f^{-1}(Z)$

Trditev 5.9 *Če je $f\pitchfork Z$, potem je $f^{-1}(Z)$ gladka podmnogoterost v M,* $\mathrm{codim}(f^{-1}(Z),M)\,\dim M-\dim f^{-1}(Z)=\mathrm{codim}(Z,N)=\dim N-\dim Z$.

Dokaz Izrek o implicitni funkciji plus linearna algebra. $\square$Poseben primer: $Z=\{q\}$ točka v N. Če $q=f(p)$, potem $T_qZ=\{0\}$, $f\pitchfork_p\{q\}\Leftrightarrow df_p(T_pM)=T_qM\Leftrightarrow f$ je submerzija v p (točka p je regularna točka preslikave f)

$$f\pitchfork Z\Leftrightarrow\forall p\in M\ f\pitchfork_p Z$$

Opomba 5.10 *Če je* $\dim M+\dim Z<\dim N$, *potem je* $f\pitchfork Z\Leftrightarrow Z=\emptyset$.

$q=f(p)\in Z$: $T_pM\xrightarrow{df_p}T_qN\xrightarrow{\tau}\underbrace{\nu_q=T_qN/_{T_qZ}}_{\text{normalni prostor } Z \text{ v } N \text{ v } q}\to 0.$

Pogoj transverzalnosti je ekvivalenten: $\tau \circ df_p\colon T_pM \twoheadrightarrow \nu_q$ je surjektivna (ker $\ker\tau = T_qZ$)
Če izberemo v okolici $U \subset N$ točke q lokalne definicijske funkcije $g_1,\dots,g_d$ za $Z\cap U = \{y \in U\colon g_1(y) = 0,\dots,g_d(y) = 0\}$ z neodvisnimi diferenciali $dg_1,\dots,dg_d$, $g = (g_1,\dots,d_g)\colon U \to \mathbb{R}^d$ potem je $\tau\colon T_qN \to \nu_q \cong \mathbb{R}^d$ predstavljena z dg_q. Torej je $f \pitchfork_p Z \Leftrightarrow dg_q \circ df_p\colon T_pM \to \nu_q \cong \mathbb{R}^d$ je surjektivna $\Leftrightarrow dg_q \circ df_p = d(g \circ f)_p\colon T_pM \to \mathbb{R}^d$ surjektivna.
$g \circ f = (g_1 \circ f,\dots,g_d \circ f)$ lokalno definicijske funkcije za prasliko $f^{-1}(Z) = \{x \in M\colon f(x) \in Z\}$.
Iz zgornjega sledi: $f \pitchfork_p Z \Leftrightarrow d(g_1 \circ f)_p,\dots,d(g_d \circ f)_p$ so linearno neodvisni. To je ekvivalentno dejstvu, da je $f^{-1}(Z)$ podmnogoterost kodimenzije d v M v neki okolici p. Dokazali smo:

Trditev 5.11 *$f \pitchfork_p Z \Leftrightarrow f^{-1}(Z)$ je podmnogoterost M v okolici točke p. $f \pitchfork Z \Rightarrow f^{-1}(Z)$ je podmnogoerost M,* $\operatorname{codim}(f^{-1}(Z),M) = \operatorname{codim}(Z,N)$.

Radi bi dokazali, da lahko vsako gladko preslikavo $f\colon M \to N$ aproksimiramo (poljubno dobro) z neko preslikavo $\tilde{f}\colon M \to N$, ki je transvezalna na dano podmnogoterost $Z \subset N$. Osnovna ideja (R. Abraham, Bulletin AMS, 69(1963)): Namesto ene preslikave gledamo družino preslikav.

$$F\colon M \times \mathbb{R}^m \to N \supset Z, \qquad F(\cdot,y) = f_y\colon M \to N$$

Definicija 5.12 *f je submerzivna družina preslikav (ali dominanten sprej preslikav), če je $\forall (x,y) \in M \times \mathbb{R}^m$ parcialni diferencial $(\partial_y F)_{(x,y)}\colon T_{(x,y)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \xrightarrow{sur.} T_{F(x,y)}N$ (v praksi ne potrebujemo vsega $\mathbb{R}^m$, lahko vzamemo npr. $D \subset \mathbb{R}^m$ ali mnogoterost).*

Ekvivalentno: $\forall x \in M$ je preslikava $\mathbb{R}^m \ni y \to F(x,y) \in N$ submerzija.

Primer 5.13 $N = \mathbb{R}^m$, $f\colon M \to N = \mathbb{R}^n$, $F\colon M \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f(\cdot,0) = f$, $(x,y) \mapsto f(x) + y$ (translati preslikave f).

Izrek 5.14 *Če je $F\colon M \times \mathbb{R}^m \to N$ submerzivna družina preslikava in je $Z \subset N$ zaprta podmnogoterost, potem je za skoraj vsak $y \in \mathbb{R}^m$ preslikava $F(\cdot,y) = f_y\colon M \to N$ transverzalna na Z.*

Dokaz Iz pogojev sledi, da je F submerzija. Potem je $S \overset{def}{=} F^{-1}(Z)$ gladka podmnogoterost v $M \times \mathbb{R}^m$ kodimenzije $d = \operatorname{codim}(Z,N)$. Označimo projekcijo $\pi\colon M \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^m$.

Trditev 5.15 *Za $\forall y \in \mathbb{R}^m$ velja $f_y \pitchfork Z \Leftrightarrow y$ je regularna vrednost projekcije $\pi|_S\colon S \to \mathbb{R}^m$.*

Dokaz Fiksiramo $(x,y) \in S$
$dF_{(x,y)}\colon T_{(x,y)}S \twoheadrightarrow T_qZ$ $(T_{(x,y)}S = (dF_{(x,y)})^{-1}(T_qZ))$
$dF_{(x,y)}\colon \Lambda \xrightarrow{\cong} \nu_q$ normala na Z v N
$T_{(x,y)}(M \times \mathbb{R}^m) = T_{(x,y)}S \oplus \Lambda$
Y je regularna vrednost $\pi|_S \Leftrightarrow d\pi_{(x,y)}\colon T_{(x,y)}S \xrightarrow{sur.} T_y\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ normalo Λ na S v (x,y) lahko izberemo tako, da je $\Lambda \subset \ker d\pi_{(x,y)} = T_{(x,y)}(M \times \{y\}) \cong T_xM$. Od prej vemo, da $dF_(x,y)$ preslika to normalo $\Lambda \subset T_{(x,y)}(M \times \{y\})$ izomorfno na neko normalo ν na Z v T_qN. $dF_{(x,y)}|_\Lambda = d(f_y)_x\colon \Lambda \xrightarrow{\cong} \nu$, kjer je $f_y = F(\cdot,y) \Rightarrow \underbrace{(df_y)_x(T_xM)}_{(df_y)_x(\Lambda)=\nu} + T_qZ = T_qN$. □S tem smo dokazali trditev. Izrek sledi iz Sardovega izreka (skoraj vsak $y \in \mathbb{R}^m$ je regularna vrednost preslikave $\pi|_S\colon S \to \mathbb{R}^m$). □

Opomba 5.16 *Če je $f \pitchfork Z$, potem je za $\forall K^{komp.} \subset M$ vsaka $f'\colon M \to Z$, ki je na K dovolj $\mathscr{C}^1$-blizu f, tudi transverzalna na Z na K ($\forall x \in K$: $f' \pitchfork_x Z$). To je zato, ker je transverzalnost odprt (stabilen) pogoj.*

Trditev 5.17 *Če je M kompaktna, lahko vsako preslikavo $M \xrightarrow{f} N$ vložimo v submerzivno družino.*

$$F\colon M \times D \to N \quad \text{submerzivna družina, } F(\cdot,y) = f$$

Dokaz Ker je množica $f(M) \subset N$ kompaktna, obstajajo vektorska polja $V_1,\dots,V_m$ na N, ki generirajo T_yN za $\forall y \in f(M)$. Naj bo ϕ_t^j tok polja V_j (obstaja za majhne $|t|$), $F(x,y_1,\dots,y_m) = \phi_{y_1}^1 \circ \dots \circ \phi_{y_m}^m(f(x))$. F je dobro definirana na $M \times D$¡ kjer je $0 \in D \subset \mathbb{R}^m$ krogla.

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{(x,0,\dots,0)} F(x,y) = V_j|_{F(x,0)=f(x)} \qquad \text{lin. neodvisni}$$

Submerzivnostni pogoj torej velja pri $y = 0$ in ker je ta pogoj odprt, velja tudi v neki okolici za dovolj majhne $|y|$. □

Uporaba transverzalnostnega izreka.

Presečna teorija: Z podmnogoterost, $X,Y \subset Z$ sklenjeni kompaktni podmnogoterosti. Če $\dim X + \dim Y < \dim Z \Rightarrow X$ in Y, se generično ne sekata (eno malce perturbiramo in postaneta transverzalni, kar pomeni, da se ne sekata).
Če $\dim X + \dim Y = \dim Z \Rightarrow X \cap Y$ je generično podmnogoterost dimenzije 0, torej je $X \cap Y$ končna množica točk.

$$\begin{aligned} T_pX + T_pY &= T_pZ \\ T_pX \cap T_pY &= \{0\} \end{aligned} \qquad \text{če vse tri orientirane}$$

Točki $p \in X \cap Y$ priredimo število $\delta(p) = \pm 1$ glede na to ali se orientaciji na T_pX, T_pY dopolnita do $+$ ali do $-$ orientacije na T_pZ.

Definicija 5.18 *Število* $X \cdot Y \overset{def}{=} \sum_{p \in X \cap Y} \delta(p)$ *je orientirano presečno število podmnogoterosti* X *in* Y *v* Z.

Presečno število $X \cdot Y$ je neodvisno od gladkih deformacij X in Y v Z.

Primer 5.19 Naj bo X kompaktna mnogoterost dimenzije n in $E \xrightarrow{\pi} X^n$ vektorski sveženj ranga n. Identificirajmo X z ničelnim prerezom svežnja E. Tedaj je

$$\chi(E) = X \cdot X \overset{def}{=} X \cdot X'$$

Eulerjevo število svežnja, to je presečno število ničelnega prereza z generično deformacijo $X' \subset E$ ničelnega prereza $X \subset E$ v E. Če $E = TX$, je to Hopfov izrek: $\chi(TX) = X \cdot X' = \chi(X)$ s triangulacijo, X' je graf vektorskega polja, $X \cdot X'$ je število ničel polja V, šteto $\pm$ glede na orientacijo.

Poglavje 6
Liejeve grupe in algebre

6.1 Definicija Liejeve grupe in primeri

Definicija 6.1 Realna Liejeva grupa *G je gladka mnogoterost, ki je hkrati grupa, tako da so algebraične operacije (produkt $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ in inverz $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$) gladke preslikave.*

Kompleksna Liejeva grupa *je kompleksna mnogoterost G, ki je hkrati grupa, tako da so grupne operacije holomorfne.*

Primer 6.2
1. $(\mathbb{R}^n, +)$ je Liejeva grupa
   $(\mathbb{C}^n, +)$ je kompleksna Liejeva grupa
2. $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \det A \neq 0\}^{odprta} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ je realna Liejeva grupa.
   $(A, B) \mapsto A \cdot B$ operacije so polinomske
   $A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ racionalna
   $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \colon \det A \neq 0\}^{odprta} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ je kompleksna Liejeva grupa.

Definicija 6.3 *Naj bo G Liejeva grupa. Liejeva podgrupa $H \subset G$ je podgrupa, ki je hkrati podmnogoterost.*

Primer 6.4
1. $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \colon \det A = 1\}$
   Očitno je podgrupa, zaprta. Preveri, da je število $1 \in \mathbb{R}$ regularna vrednost preslikave $A \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto \det A \in \mathbb{R}$ (to je, rang je enak 1 v vsaki točki, kjer $\det A = 1$). Torej je $SL_n(\mathbb{R})$ hiperploskev v $GL_n(\mathbb{R})$ (glej vaje).
   $SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \colon \det A = 1\}$ je kompleksna Liejeva podgrupa grupe $GL_n(\mathbb{C})$.
2. $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \colon A^T A = I\}$ (ortogonalna grupa) je realno analitična Liejeva podgrupa v $GL_n(\mathbb{R})$.
   $U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \colon \overline{A}^T A = I\}$ (unitarna grupa) je realna Liejeva podgrupa v $GL_n(\mathbb{C})$, ni pa kompleksna Liejeva podgrupa, saj ni kompleksna podmnogoterost.

3. Če je $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \ldots + \mathbb{Z}e_k$ diskretna aditivna pogrupa v $\mathbb{R}^n$, je kvocient $\mathbb{R}^n/_\Gamma$ je Liejeva grupa z operacijo $+$, podedovano iz $\mathbb{R}^n$. Če je Γ maksimalnega ranga n, je $\mathbb{R}^n/_\Gamma$ torus.
4. Podobno kot v prejšnji točki je za vsako diskretno aditivno podgrupo $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ kvocient $\mathbb{C}^n/_\Gamma$ kompleksna Liejeva grupa.

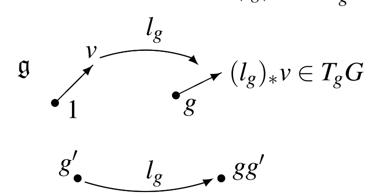
Naj bo $1 \in G$ enota Liejeve grupe G. Vsakemu elementu $g \in G$ priredimo levo moženje

$$l_g \colon G \to G, \quad l_g(g') = gg' \;\; (\forall g' \in G)$$

in desno množenje

$$r_g \colon G \to G, \quad r_g(g') = g'g \;\; (\forall g' \in G).$$

Obe preslikavi l_g, r_g sta difeomorfizma z inverzom $(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}}$, $(r_g)^{-1} = r_{g^{-1}}$.



6.2 Liejeva algebra in invariantna vektorska polja

Definicija 6.5 *Naj bo G Liejeva grupa z enoto* 1. *Njena* Liejeva algebra *je*

$$\mathfrak{g} \stackrel{def}{=} T_1 G = \textit{ tangentni prostor na } G \textit{ v enoti } 1 \in G.$$

Vsakemu elementu $v \in \mathfrak{g}$ priredimo vektorsko polje $V = \tilde{v}$ na G s predpisom:

$$V_g = d(l_g)|_1 \cdot v = (l_g)_* v \in T_g G, \quad g \in G.$$

Očitno je V gladko vektorsko polje na G, saj so grupne operacije gladke.

Trditev 6.6 *Tako definirano vektorsko polje V na G je levo invariantno.*

Dokaz Naj bo $g, h \in G$. Potem velja

$$(l_h)_* V_g = (l_h)_* \circ (l_g)_* v = (l_h \circ l_g)_* v = (l_{hg})_* v = V_{hg} = V_{l_h(g)}.$$

To pomeni, da je V levo invariantno. $\square$
Podobno definiramo polje $v \rightsquigarrow \widetilde{V}_g = d(r_g) v \in T_g G$. Preveri, da je tako definirano vektorsko polje desno invariantno, to je, $(r_h)_* \widetilde{V} = \tilde{V}$, $\forall h \in G$.

Opomba 6.7 *V splošnem $V \neq \widetilde{V}$, razen če je G abelova grupa.*

Primer 6.8 1. $G = (\mathbb{R}^n, +)$ (enota je $1 = 0$)
Liejeva algebra $\mathfrak{g} = T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$
$v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$
$\tilde{v} = V = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ (vektor $v = V_0$ translatiramo po $\mathbb{R}^n$)
2. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $1 = 1$
$v \in T_1\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, l_x je množenje z x
$V_x = vx\frac{\partial}{\partial x}$
Bazno levo invariantno vektorsko polje: $x\frac{\partial}{\partial x}$

Oglejmo si vložitev

$$T_1G = \mathfrak{g} \overset{\Phi}{\mapsto} \aleph(G)$$

v Liejevo algebro vseh gladkih vektorskih polj na G. Spomnimo se, da je $\aleph(G)$ Liejeva algebra za operacijo komutator (ali Liejev odvod) vektorskih polj:

$$(V, W) \mapsto [V, W] = L_V W$$

Trditev 6.9 *Če sta V, W levo invariantni vektorski polji na G, potem so tudi polja $V + W$, cV ($c \in \mathbb{R}$), $[V, W]$ levo invariantna.*

To pomeni, da je slika vložitve $\Phi\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \aleph(G)$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre vseh vektorskih polj. *Torej obstaja natanko ena struktura Liejeve algebre na $\mathfrak{g} = T_1G$, za katero je vložitev $\Phi\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \aleph(G)$ Liejev izomorfizem $\mathfrak{g}$ na podalgebro levo invariantnih polj na G.*

Dokaz Naj bo l poljubno levo množenje na G. Potem je

$$l_*(V + W) = l_*V + l_*W = V + W$$

ker sta V in W levo invariantni. Podobno

$$l_*(cV) = cl_*V = cV, \quad l_*([V, W]) = [l_*V, l_*W] = [V, W].$$

□

Trditev 6.10 *Tangentni sveženj vsake Liejeve grupe G je trivialen: $TG \cong G \times \mathbb{R}^n$, $n = \dim G$.*

Dokaz Izberimo bazo $v_1, \ldots, v_n$ Liejeve algebre $T_1G = \mathfrak{g}$. Naj bodo $V_1, \ldots, V_n$ pripadajoča levo invariantno polja. Ker je $V_j(g(= d(l_g)v_j$ in je levo množenje l_g difeomorfizem grupe G, so vektorji $V_1(g), \ldots, V_n(g)$ baza T_gG za vsak $g \in G$. Preslikava

$$G \times \mathbb{R}^n \ni (g, (c_1, \ldots, c_n)) \overset{\Phi}{\mapsto} \sum_{j=1}^{n} c_j V_j(g) \in T_gG$$

je izomorfizem vektorskih svežnjev. □

Trditev 6.11 *Vsako levo invariantno (ali desno invariantno) vektorsko polje na Liejevi grupi je kompletno, to je, njegov tok ϕ_t obstaja za $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Dokaz Naj bo $\gamma(t)$ tokovnica polja V, $\gamma(0) = 1$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
Izberimo element $g \in G$. Oglejmo si pot $\lambda(t) = l_g(\gamma(t)) = g\gamma(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
$\lambda(0) = g\gamma(0) = g$
$\dot{\lambda}(t)|_{t=0} = (dl_g)_1 \cdot \dot{\gamma}(0) = (dl_g)_1 \cdot v = V_g$ po definiciji levo invariantnega polja
$\dot{\lambda}(t) = (l_g)_* \cdot \dot{\gamma}(t) = (l_g)_* V_{\gamma(t)} = V_{g\gamma(t)} = V_{\lambda(t)}$.
Torej je $\lambda(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tokovnica polja V, ki je v času $t = 0$ v točki g.
To pomeni, da fundamentalna domena toka polja V vsebuje množico $G \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset G \times \mathbb{R}$. Od tod sledi, da je V kompletno (fundamentalna domena je $G \times \mathbb{R}$). $\square$

Trditev 6.12 *Tokovnica levo invariantnega vektorskega polja V skozi enoto $1 \in G$ je enoparametrična podgrupa grupe G.*

Dokaz Fiksirajmo $s \in \mathbb{R}$. Oglejmo si poti

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t+s)$$
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(s)\gamma(t)$$

Obe poti sta tokovnici polja V, ki gresta pri $t = 0$ skozi isto točko $\gamma(s)$. Zaradi enoličnosti tokovnic sledi, da sovpadata, torej je $\gamma(t+s) = \gamma(s)\gamma(t) = \gamma(t)\gamma(s)$ za vsak $s, t \in \mathbb{R}$. $\square$

Primer 6.13 1. $G = (\mathbb{R}^n, +)$
$\mathfrak{g} = T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$
$[\cdot, \cdot] = 0$ ker je G abelova
Levo invariantna polja so konstantna polja
$v, w \in \mathfrak{g}$, $[v, w] = [V, W]_0$ (ker imata V,W konstantne koeficiente), $V_0 = v$, $W_0 = w$.

2. $GL_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}_n = T_I GL_n(\mathbb{R}) = T_I \mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ (vse $n \times n$ matrike), $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$
$A \in \mathfrak{gl}_n$, $A = (a_{ij})$
V^A pripadajoče levo invariantno vektorsko polje na $GL_n(\mathbb{R})$
$X \in GL_n(\mathbb{R})$
$\gamma(t) = I + tA \in GL_n(\mathbb{R})$ za majhne $|t|$, $\gamma(0) = I$, $\dot{\gamma}(0) = A$ tangentni vektor poti γ.

$$\begin{aligned} (V^A)_X &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} l_X \cdot \gamma(t) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} X(I + tA) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (X + tXA) \\ &= XA \in T_X GL_n(R) \cong \mathbb{R}^{n\times n}. \end{aligned}$$

Označimo koordinate na $\mathbb{R}^{n\times n}$ z $X = x_{ij}$:

$$(V^A)_X = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

Vsota $\sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj}$ je (i,j) element matrike XA, ki predstavlja vektorsko polje V^A v točki X. Če je $B \in \mathfrak{gl}_n$, je

$$(V^B)_X = \sum_{l,m=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{n} x_{lp} b_{pm} \right)}_{(l,m) \text{ el. v } XB} \frac{\partial}{\partial x_{lm}}.$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned}
\left[V^A, V^B\right] &= \sum_{i,j,k,l,m,p} \left(x_{ik} a_{kj} \frac{\partial (x_{lp} b_{pm})}{\partial x_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{lm}} - x_{lp} b_{pm} \frac{\partial (x_{ik} a_{kj})}{\partial x_{lm}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right) = \\
&= \sum_{i,j,k,m} x_{ik} a_{kj} b_{jm} \frac{\partial}{\partial x_{im}} - \sum_{i,j,k,p} x_{ip} b_{pk} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}
\end{aligned}$$

Sedaj pogledamo vrednosti pri $X = I$: $x_{ip} = \delta_{ip}$, $x_{ik} = \delta_{ik}$. Torej je

$$\left[V^A, V^B\right]_I = \underbrace{\sum_{i,j,m} a_{ij} b_{jm}}_{(AB)_{im}} \frac{\partial}{\partial x_{im}} - \underbrace{\sum_{i,j,k} b_{ik} a_{kj}}_{(BA)_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \rightsquigarrow AB - BA.$$

Torej je $[V^A, V^B]$ levo invariantno vektorsko polje na $GL_n(\mathbb{R})$, ki pripada matriki $[A,B] = AB - BA \in \mathfrak{gl}_n$.
$\mathfrak{gl}_n = (\mathbb{R}^{n\times n}, [\cdot,\cdot])$ matrični komutator
Tok polja $V_X^A = XA$:
Tokovnica $\gamma(t)$ zadošča enačbi $\dot\gamma(t) = V^A_{\gamma(t)} = \gamma(t)A$

$$\Longrightarrow \gamma(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \qquad \gamma(0) = I$$

$\phi_t(X) = Xe^{tA}$ je tok skozi točko $X \in GL_n(\mathbb{R})$.

6.3 Eksponentna preslikava na Liejevi grupi

$$\exp\colon \mathfrak{g} = T_1 G \to G$$

Modelni primer: $G = GL_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ ($n \times n$ matrike);

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Eksponentno prelikavo na poljubni Liejevi grupi definiramo na naslednji način. Vektorju $v \in \mathfrak{g}$ priredimo levo invariantno polje V s predpisom

$$V(g) = (dl_g)_1 v \in T_g G.$$

Ker je polje V kompletno, obstaja tokovnica $\phi_t(1) = e^{tv} \cdot 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}$. Sedaj definiramo

$$\exp v = \phi_1(1).$$

V primeru, ko je $G = GL_n(\mathbb{R})$, $v = A \in \mathfrak{g}l_n$, $\phi_t^A(I) = e^{tA}$, dobimo

$$\exp(A) = \phi_1^A(I) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Preslikava $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ je gladka, $\exp(0) = 1$.

Trditev 6.14 *Diferencial eksponentne preslikave* $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ *v identiteti* $1 \in G$ *je identična preslikava na Liejevi algebri* $\mathfrak{g}$*:*

$$d\exp|_0\colon T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \longrightarrow T_1 G = \mathfrak{g}, \quad d\exp|_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}.$$

Dokaz Naj bo $v \in \mathfrak{g}$ in V prirejeno levo invariantno polje na G. Označimo z $\lambda_v(t) = \phi_t^v(1)$ tok polja V. Po definiciji je torej $\exp(v) = \lambda_v(1)$ za vsak $v \in \mathfrak{g}$.
Naj bo $s \in \mathbb{R}$. Ker je sV levo invariatno polje, prirejeno vektorju $sv = sV|_1 \in \mathfrak{g}$, je preslikava $t \mapsto \lambda_{sv}(t)$ tokovnica polja sV, ki gre pri $t = 0$ skozi $1 \in G$. Trdimo:

$$\lambda_{sv}(t) = \lambda_v(st).$$

Dokaz:

$$\frac{d}{dt}\lambda_v(st) = \underbrace{\frac{d}{du}\lambda_v(u)}_{V(\lambda_v(st))} \underbrace{\frac{du}{dt}}_{s} = s \cdot V(\lambda_v(st)).$$

To pomeni, da je tudi $t \mapsto \lambda_v(st)$ tokovnica polja sV, ki gre pri $t = 0$ skozi $1 \in G$. Iz enoličnosti tokovnic sledi $\lambda_{sv}(1) = \lambda_v(s)$. Torej velja

$$\exp(sv) = \lambda_v(s),\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Z odvajanjem po s pri $s = 0$ dobimo

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(sv) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \lambda_v(s) = v.$$

Ker je $s \mapsto sv \in \mathfrak{g}$ pot s tangentnim vektorjem v, je po geometrijski definiciji diferenciala leva stran zgornje enačbe enaka $d\exp|_0 \cdot v$. Torej zgornja enačba pove

$$d\exp|_0 \cdot v = v, \quad \forall v \in \mathfrak{g}.$$

□

Izrek o inverzni preslikavi pove, da exp preslika neko okolico $0 \in \mathfrak{g}$ difeomorfno na neko okolico $1 \in G$. V splošnem ta preslikava ni surjektivna in lahko ima kritična točke daleč od izhodišča 0.

Sprej na Liejevi grupi. S translacijo eksponentne preslikave z grupnim produktom dobimo na G preslikavo, ki se imenuje *sprej*. Konstrukcija je naslednja.
Naj bo $\dim G = n$. Produkt $G \times \mathfrak{g} \cong G \times \mathbb{R}^n$ je trivialen vektorski sveženj nad G. Definiramo preslikavo $s\colon G \times \mathfrak{g} \to G$ s predpisom

$$s(g,v) = ge^v = l_g(e^v), \quad s(g,0) = g.$$

Njen diferencial v točki $(g,0)$ iz ničelnega prereza je linearna preslikava

$$ds_{(g,0)}\colon T_{(g,0)}(G \times \mathfrak{g}) \to T_g G.$$

Tangentni prostor $T_{(g,0)}(G \times \mathfrak{g})$ je direktna vsota $T_g G \oplus T_0\mathfrak{g}$, kjer je drugi sumand tangenta na vlakno (t.i. vertikalni tangentni prostor v točki $(g,0)$). Zožitev diferenciala na drugo komponento $\mathfrak{g}$ je enak diferencialu preslikave $\mathfrak{g} \ni v \mapsto l_g(e^v)$ pri $v = 0$. Po verižnem pravilu je ta enak

$$d(l_g)_1 \circ d_0 e^v = d(l_g)_1\colon \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} T_g G,$$

torej je izomorfizem.

$$\begin{tikzcd} G \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"] \arrow[d, bend left=60, "s \text{ (sprej)}"] \\ G \end{tikzcd}$$

6.4 Liejeve podgrupe in podalgebre

Naj bosta G in G' Liejevi grupi in $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ njuni Liejevi algebri.

Definicija 6.15 *Gladka preslikava $F\colon G \to G'$, ki je hkrati homomorfizem grup, se imenuje* homomorfizem Liejevih grup.

Naslednjo trditev smo dokazali na vajah.

Trditev 6.16 *Naj bo $F\colon G \to G'$ homomorfizem Liejevih grup.*

1. *Za vsako levo invariantno vektorsko polje V na G obstaja natanko eno levo invariantno polje $\widetilde{V}$ na G', tako da velja $dF_g V_g = \widetilde{V}_{F(g)}$ za vsak $g \in G$.*
2. *Diferencial $dF_1\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ v identiteti $1 = 1_G \in G$ je homomorfizem Liejevih algeber.*
3. *Jedro $\ker dF_1$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*
4. *Slika $dF_1(\mathfrak{g})$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}'$.*
5. *Rang preslikave F je konstanten (neodvisen od točke $g \in G$).*
6. *Jedro $H = \ker F = \{g \in G\colon F(g) = 1_{G'}\}$ je Liejeva podgrupa grupe G.*

Posledica 6.17 *Če je H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G, je njena Liejeva algebra $\mathfrak{h} = T_1 H$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g} = T_1 G$.*

Dokaz Uporabimo prejšnjo trditev za inkluzijo $F\colon H \hookrightarrow G$. $\square$
Sedaj bomo dokazali naslednji izrek.

Izrek 6.18 *Naj bo G Liejeva grupa z Liejevo algebro $\mathfrak{g} = T_1 G$. Za vsako Liejevo podalgebro $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ obstaja natanko ena povezana Liejeva podgrupa $H \subset G$ z Liejevo algebro $\mathfrak{h} = T_1 H$.*

Dokaz Izberemo bazo $v_1, \ldots, v_d \in \mathfrak{h} = \mathbb{R}^d$.
Naj bodo $V_1, \ldots, V_d$ prirejena levo invariantna polja. Ta napenjajo podvseženj $E \subset TG$ ranga d. Njegovo vlakno E_g je enako

$$E_g = \mathrm{Lin}\{V_1(g), \ldots, V_d(g)\}$$

$\dim E_g = d$ neodvisna od izbire $g \in G$.
Trdimo, da je E involutiven. V ta namen moramo dokazati, da je komutator $[V_j, V_k]$ tangenten na E za vsak $j,k = 1, \ldots, d$. To polje je levo invariantno, ki pripada komutatorju $[v_j, v_k] \in \mathfrak{g}$. Ker je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra, je $[v_j, v_k] \in \mathfrak{h}$, torej je

$$[v_j, v_k] = \sum_{i=1}^{d} c_{ijk} v_i, \quad c_{ijk} \in \mathbb{R}.$$

Ker vemo, da se operacije na vektorjih iz $\mathfrak{g}$ ujemajo z operacijami na prirejenih levo invariantnih vektorskih poljih, odtod sledi

$$[V_j, V_k] = \sum_{i=1}^{d} c_{ijk} V_i.$$

Polje na desno pa je seveda tangentno na E.
Po Frobeniusovemu izreku obstaja natanko ena maksimalna integralna podmnogoterost $H \subset G$ skozi točko 1. H je imerzirana podmnogoterost v G, ki je dobljena kot orbita tokov polj vektorskih polj $V_1, \ldots, V_d$ skozi 1.
Ni težko dokazati, da je H tudi podgrupa grupe G (glej vaje). $\square$

H ni nujno enostavno povezana. Lokalno jo dobimo z eksponenciranjem vektorjev iz $\mathfrak{h}$.
Brez dokaza bomo navedli naslednji izrek.

Izrek 6.19 (Ado) *Vsaka končno dimenzionalna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je izomorfna neki Liejevi podalgebri $\mathfrak{gl}_n$ za nek $n \in \mathbb{N}$.*

Posledica 6.20 *Za vsako Liejevo algebro $\mathfrak{g}$ obstaja povezana Liejeva grupa G, ki ima $\mathfrak{g}$ za svojo Liejevo algebro: $T_1 G = \mathfrak{g}$.*

Če je $\widehat{G} \xrightarrow{\pi} G$ univerzalni krov ($\widehat{G}$ enostavno povezana Liejeva grupa), potem je π lokalni difeomorfizem:

$$T_1 \widehat{G} = T_1 G = \mathfrak{g}$$

Opomba 6.21 V splošnem univerzalni krov neke matrične Liejeve grupe (podgrupa v $GL_n(\mathbb{R})$) ni matrična grupa.

Primer 6.22 $SO(2n)$, $n \geq 2$: npr. $SO(4)$ ima fundamentalno grupo $\pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow Spin(4) \xrightarrow[\text{krov}]{\text{dvolistni univerzalni}} SO(4) \to 1$$

Primer 6.23

$$1 \to \mathbb{S}^3 = SU(2) \hookrightarrow U(2) \xrightarrow{det} \mathbb{S}^1 = U(1) \to 1$$

$$\pi_1(U(2)) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$$

6.5 Adjungirana reprezentacija Liejeve grupe

Vsako Liejevo grupo G lahko vložimo v Diff$G$:

$$\begin{aligned} G &\hookrightarrow \mathrm{Diff}G \\ g &\mapsto l_g \end{aligned}$$

Levo množenje l_g ni avtomorfizem Liejeve grupe, ker identiteto slika v g.
Avtomorfizem G je difeomorfizem $G \to G$, ki je tudi grupni homomorfizem.

$$\mathrm{Aut}G = \text{ vsi avtomorfizmi } G$$

Primer 6.24 Vsakemu elementu $g \in G$ priredimo *notranji avtomorfizem* $\sigma(g) \in \mathrm{Aut}G$ s predpisom

$$\sigma(g)h = ghg^{-1} \quad \forall h \in G \ \text{(konjugiranje z } g\text{)}.$$

Preverimo, da je to res avtomorfizem:

$$\sigma(g)(h_1h_2) = gh_1h_2g^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = \sigma(g)h_1 \cdot \sigma(g)h_2$$

□

Naj bo G povezana Liejeva grupa in $\alpha \in \mathrm{Aut}G$. Njegov diferencial α_* preslika vsako levo invariantno polje na G v levo invariantno polje; torej α_* inducira Liejev izomorfizem Liejeve algebre levo invariantnih vektorskih polj na G samo nase. Njegova vrednost v identiteti $1 \in G$ je torej Liejev izomorfizem

$$d\alpha_1 \colon T_1G = \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}.$$

Naj bo $v \in \mathfrak{g}$ in V prirejeno levo invariantno polje: $V_1 = v$. Označimo $w = d\alpha_1(v) \in \mathfrak{g}$ in W levo invariantno polje z $W_1 = w$. Potem je $\alpha_* V = W$.
Označimo s ϕ_t tok polja V in s ψ_t tok polja W. Iz $\alpha_* V = W$ sledi

$$\alpha \circ \phi_t = \psi_t \circ \alpha \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Uporabimo to identiteto pri $t = 1$ in na začetnem elementu $1 \in \mathfrak{g}$:

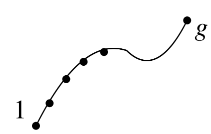
$$\alpha \circ \phi_1(1) = \psi_1 \circ \alpha(1) = \psi_1(1).$$

Po definiciji eksponentne preslikave je $e^v = \phi_1(1)$ in $e^w = \psi_1(1)$. Zgornja enačba torej pove:

$$\alpha(e^v) = e^w = e^{d\alpha_1 \cdot v}.$$

Posledica 6.25 *Če je G povezana Liejeva grupa in je $\alpha \in \mathrm{Aut}G$ avtomorfizem z $d\alpha_1 = \mathrm{Id}$, potem je $\alpha = \mathrm{Id}_G$.*

Dokaz Če je $d\alpha_1 = \mathrm{Id}$, sledi $\alpha(e^v) = e^v$, $\forall v \in \mathfrak{g}$. Vemo, da je množica $U = \{e^v \in G \colon v \in \mathfrak{g}\}$ okolica $1 \in G$. Ker je na tej okolici $\alpha = \mathrm{Id}$ in je G povezana, sledi $\alpha = \mathrm{Id}_G$. Razlog je v tem, da lahko vsak element $g \in G$ zapišemo kot končen produkt $g = g_1 g_2 \dots g_N$ elementov $g_j \in U$.



$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_N, \qquad \forall g_j = e^{v_j}$$
$$\alpha(g) = \alpha(e^{v_1})\alpha(e^{v_2})\dots\alpha(e^{v_N}) = g$$

□ □

Dobili smo torej reprezentacijo grupe avtomorfizmov $\mathrm{Aut}G$ kot grupo linearnih avtomorfizmov Liejeve algebre $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{Aut}G \ni \alpha \mapsto d\alpha_1 \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g} = \text{ grupa vseh Liejevih avtomorfizemov } \mathfrak{g}.$$

Ta reprezentacija je zvesta (faithful), kar je ravno prejšnja posledica.

Oglejmo si sedaj prirejeno reprezentacijo podgrupe vseh konjugiranj σ_g:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{Aut}G \arrow[r, "\text{dif. v } 1"] & \mathrm{Aut}\mathfrak{g} \\ g \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "Ad"'] & \sigma(g) \arrow[r, mapsto] & d\sigma(g)_1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} Ad\colon\ G &\to \ \mathrm{Aut}\mathfrak{g} \quad \text{je adjungirana reprezentacija } G \\ g &\mapsto d\sigma(g)_1 \end{aligned}$$

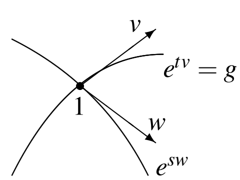
Z diferenciranjem preslikave $Ad\colon G \to \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ v identiteti $1 \in G$ dobimo adjungirano reprezentacijo Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ v $\mathrm{End}\mathfrak{g}$:

$$dAd_1\colon T_1G = \mathfrak{g} \xrightarrow{ad} T_1\mathrm{Aut}\mathfrak{g} = \mathrm{End}\mathfrak{g}.$$

Trditev 6.26 *Za vsak $v \in \mathfrak{g}$ velja*

$$ad(v)w = [w,v] \quad \forall w \in \mathfrak{g}.$$

Dokaz Izberemo lokalne koordinate $x = (x_1,\dots,x_n)$ na G v okolici 1, $x(1) = (0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$.
$\mathfrak{g} \ni v \rightsquigarrow V = \sum_{i=1}^n \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ levo invariantno vektorsko polje na G
$\mathfrak{g} \ni w \rightsquigarrow W = \sum_{j=1}^n \eta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$
Fiksirajmo $t \in \mathbb{R}$.



$$\sigma(g)e^{sw} = ge^{sw}g^{-1} = e^{tv}e^{sw}e^{-tv}$$

Za fiksen t je

$$Ad(e^tv)w = d\sigma(e^{tv})\big|_1 \cdot w = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \sigma(e^{tv})e^{sw}.$$

Z odvajanjem po t pri $t = 0$ dobimo:

$$ad(v)w = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (Ad(e^{tv})w) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{t=s=0} e^{tv}e^{sw}e^{-tv}$$

Z Liejevim razvojem toka ni težko videti, da je ta izraz enak $[w,v]$. $\square$

References

1. R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988.
2. L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
3. W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume 120 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, second edition, 1986.
4. R. Bott and L. W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
5. F. Forstnerič. *Stein manifolds and holomorphic mappings*, volume 56 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Cham, second edition, 2017. The homotopy principle in complex analysis.
6. V. Guillemin and A. Pollack. *Differential topology*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. Reprint of the 1974 original.
7. M. W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.
8. O. Lehto. *Univalent functions and Teichmüller spaces*, volume 109 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1987.
9. J. Mrčun. *Topologija*, volume 44 of *Izbrana poglavja iz matematike in računalništva*. DMFA, Ljubljana, 2008.
10. M. Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.
11. F. W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.