PRINCIP OKA-GRAUERT-GROMOV IN UPORABA V KOMPLEKSNI GEOMETRIJI

FRANC FORSTNERIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Veljavnost homotopskega principa v nekem analitičnem ali geometrijskem problemu pomeni, da obstaja analitična rešitev, če ni topoloških obstrukcij. Homotopski princip v kompleksni analizi in geometriji sloni v najvišji meri na delih Kiyoshija Oke, Hansa Grauerta in prejemnika Abelove nagrade za leto 2009, Mikhaela Gromova. V članku so opisane glavne poteze teorije od klasičnih rezultatov do nekaterih najnovejših dosežkov. Predgovor vsebuje nekaj osnovnih podatkov o življenju in delu Henrika Nielsa Abela, o Abelovi nagradi in o dosežkih Gromova na področju geometrije.

THE OKA-GRAUERT-GROMOV PRINCIPLE AND APPLICATIONS IN COMPLEX GEOMETRY

An analytic or a geometric problem is said to satisfy the homotopy principle if an analytic solution exists provided that there are no topological obstructions. The homotopy principle in complex analysis and geometry is based mainly on the works of Kiyoshi Oka, Hans Grauert, and of the 2009 Abel laureate, Mikhael Gromov. We present the main features of the theory, from classical results to the newest achievements. The preface contains some basic data on the life and work of Henrik Niels Abel, on the Abel Prize, and on Gromov's work in the field of geometry.

1. Predgovor – Abelova nagrada 2009

Najpomembnejšo nagrado na področju matematike za leto 2009, to je *Abelovo nagrado*, ki jo podeljuje Norveška akademija znanosti, je prejel *Mikhael Leonidovich Gromov* za svoje revolucionarne prispevke geometriji. Nagrado je Gromov prejel iz rok norveškega kralja Haralda dne 19. maja 2009. Abelova nagrada se podeljuje enkrat letno od 2003

Date: June 28, 2010.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 32E10, 32E30, 32H02.

Key words and phrases. Steinove mnogoterosti, holomorfne preslikave, vektorski svežnji, homotopski princip.

dalje. Njen status in ugled je postal enakovreden Nobelovi nagradi na področju fizike, kemije in medicine. Več o nagradi v [32].

V zapisu bom najprej na kratko predstavil življenje in delo genialnega norveškega matematika Henrika Nielsa Abela, po katerem se nagrada imenuje, ter ozadje, ki je vodilo do njene ustanovitve. Zatem bom orisal nekaj temeljnih prispevkih Mikhaela Gromova k različnim področjem matematike, pri čemer je geometrija vselej glavna iztočnica.

Niels Henrik Abel (5. avgust 1802 – 6. april 1829) je prispeval revolucionarna odkritja na mnogih področjih matematike in po njem se danes imenuje vrsta matematičnih pojmov in objektov.

Kot študent na Friderikovi univerzi v Kristianiji (današnjem Oslu, Norveška) je Abel skušal rešiti splošno enačbo pete stopnje

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Mislil je že, da je uspel, a je svojo napako pravočasno odkril. V članku v samostojni brošuri je leta 1824 dokazal, da se ta enačba ne da rešiti z radikali, to je, z eksplicitno formulo, v kateri bi nastopali algebraični izrazi (vsote, produkti, koreni,...) v koeficientih $a_0, a_1, \ldots, a_5$. S tem je rešil problem, ki je izzival matematike od časov Bombellija in Vieta in tako preprečil nadaljnje neuspešne ali napačne poizkuse reševanja. Podrobnejši dokaz je objavil leta 1826 v prvem zvezku *Crellove revije.* Abelov rezultat velja tudi za enačbe višje stopnje, enačbe do vključno četrte stopnje pa so vselej rešljive z radikali.

Leta 1825 je Abel prejel štipendijo norveške vlade, ki mu je omogočila dvoletno gostovanje pri tedaj pomembnih matematikih v Berlinu, v Italiji in v Parizu. V tem času je raziskoval teorijo funkcij, še posebej eliptične in hipereliptične funkcije, ter nov razred funkcij, ki nosi njegovo ime. Napisal je več člankov o konvergenci vrst, o Abelovih integralih in o eliptičnih funkcijah.

Leta 1828 je Abel postal inštruktor na univerzi in vojaški šoli v Kristianiji (Oslu). *August Leopold Crelle* (1780 – 1955) mu je leta 1929 uspel dobiti profesorsko mesto na Univerzi v Berlinu in mu je 8. aprila 1829 pisal o tem. Bilo je prepozno, saj je Abel umrl za posledicami tuberkuloze dva dni pred tem pri starosti 27 let.

Abelova dela so pomemben prispevek matematiki zlasti na področju algebre, teorije grup, integralnega računa in teorije eliptičnih funkcij. Večino svojih znanstvenih del je objavil v reviji *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ki jo je ustanovil Leopold Crelle leta 1826 in jo urejal do svoje smrti leta 1855. Že v prvem zvezku revije je bilo objavljenih kar pet Abelovih člankov. V drugem zvezku iz leta 1827 je izšel prvi del njegovih *Rechérches sur les fonctions elliptiques*, ki predstavljajo začetek teorije dvojno periodičnih funkcij. Abelova matematična dela je zbral in uredil *Bernt Michael Holmboe* (1795 - 1850) in norveška vlada je omogočila objavo leta 1839. Leta 1881 je izšla razširjena izdaja, ki sta jo uredila *Peter Ludwig Mejdell Sylow* (1832 - 1918) in *Marius Sophus Lie* (1842 – 1899).

Abelovo delo je bilo v prvi vrsti teoretično, brez posebnega prizadevanja po praktični uporabi dosežkov. Kljub temu je bilo izjemno odmevno in je vodilo k razvoju številnih teorij, od katerih so mnoge kasneje doživele tudi praktično uporabo. Mnogo matematičnih objektov je dobilo pridevnik abelovski. Govorimo o Abelovi integralski enačbi, ki vodi do Abelovih funkcij. Komutativne grupe imenujemo *Abelove grupe*. Pomemben razred transcendentnih funkcij se imenuje po njem.

Čeprav ima matematika izjemen praktični in vzgojni pomen in je nepogrešljiva podstat vrsti drugih znanosti, vsebuje tudi bistvene elemente estetike – čistost oblike, preprostost v objemu kompleksnosti, eleganco, lepoto. V zgodovini matematike je bil praktični pomen in uporaba njenih izsledkov zelo pogosto le nenačrtovani stranski produkt. Še posebej na primerih vrhunskih matematikov, kot je bil Abel, nas zgodovina uči, da matematiki predvsem potrebujejo ustvarjalno svobodo.

Abelova zgodba je značilna še v enem pogledu, ki pogosto preseneča znanstvenike na drugih področjih – kako mladi so lahko matematiki, ko pridejo do svojih najpomembnejših odkritij. Abel je naredil izjemne stvari do svojega 27. leta. Po drugi strani pa mnogi matematiki ostanejo znanstveno aktivni še celo potem, ko že prejemajo zasluženo pokojnino. V tem smislu veliki matematiki bolj spominjajo na velike skladatelje kot pa na znanstvenike na drugih področjih.

Več o življenju in delu Abela lahko bralec najde v Wikipediji [1].

Ob stoletnici rojstva Henrika Nielsa Abela leta 1902 si je znani norveški matematik Sophus Lie (po njem se imenujejo *Liejeve grupe*) prizadeval organizirati nagrado z Abelovim imenom. V prizadevanja je vključil mednarodno matematično skupnost; norveški kralj Oskar II je ponudil pomoč. Znanstveno društvo v Kristianiji, predhodnik sedanje Norveške akademije znanosti v Oslu, je pripravilo potrebne dokumente za podeljevanje nagrade enkrat na vsakih pet let. Organiziran je bil festival v Kristianiji (Oslu) in v Abelovem rojstnem kraju Frøland, Abel pa je dobil spomenik v bližini kraljeve palače v Oslu.

Na žalost pa je prekinitev državne zveze Norveške s Švedsko leta 1905 ter posledična politična nestabilnost prekrižala te črte.

Napori za ustanovitev nagrade so bili obnovljeni šele sto let kasneje, ob 200-letnici Abelovega rojstva v letu 2002, tokrat uspešno. Nagrado podeljuje Norveška akademija znanosti, nagrajenca pa izbere izmed nominiranih kandidatov petčlanska komisija v mednarodni sestavi. Prva Abelova nagrada v znesku 6 milijonov norveških kron (približno 750.000 Evrov) je bila podeljena 3. junija 2003, prejemnik je bil *Jean-Pierre Serre*. Naslednji nagrajenci so bili *Sir Michale Francis Atiyah* in *Isadore M. Singer* (2004), *Peter D. Lax* (2005), *Lennart Carleson* (2006), *Srinivasa S. R. Varadhan* (2007), *John Griggs Thompson* in *Jacques Tits* (2008) ter *Mikhael Leonidovich Gromov* (2009).

Sedaj pa nekaj besed o delu M. Gromova. Geometrija je eno najstarejših in najbolj temeljnih področij matematike in znanosti nasploh. Njen izvor sega tisočletja nazaj v zgodovino, v čase Archimeda, Evklida, Pitagore in drugih velikih začetnikov. Tedaj je znanje vzniklo iz potrebe najti odgovore na praktična vprašanja, kot je recimo oceniti velikost nekega zemljišča, iz potreb pri navigaciji na morju, pa tudi iz bolj ezoteričnih želja, kot je izračunati oddaljenost Lune od Zemlje. Geometrija se ukvarja s študijem konceptov kot so velikost, oblika, razdalja, medsebojna pozicija objektov, pa tudi z bolj kompleksnimi lastnostmi ploskev in njihovih višje razsežnih analogov (mnogoterosti) kot so npr. ukrivljenost. *Einsteinova teorija relativnosti* sloni na *Lorentzovi geometriji*. Področje geometrije, ki se imenuje *gauge theory* (kar bi lahko prevedli kot umeritvena teorija), igra pomembno vlogo v modernih teorijah matematične fizike kot so *Donaldsonova* in *Seiberg-Wittenova* teorija.

V zadnjih petdesetih letih je doživela geometrija revolucionaren razvoj in spremembe. Mikhael Gromov je pri tem kreiral in vodil nekatere najpomembnejše smeri razvoja ter razvijal originalne ideje, ki so podale nove perspektive v geometriji in tudi v drugih področjih matematike.

Gromov je igral bistveno vlogo pri izgradnji moderne *Riemannove geometrije*, sodobnem področju s koreninami v klasični Riemannovi geometriji (glej [29]). Je tudi eden od utemeljiteljev *globalne simplektične geometrije*. Njegovo najbolj znano in verjetno najslavnejše delo je vodilo v definicijo *Gromov–Wittenovih invariant* (glej [28]). To je sedaj eno od izjemno aktivnih področij matematike s tesnimi povezavami s področjem moderne teoretične fizike, ki se imenuje *kvantna teorija polja*.

Eno od pomembnih orodij, ki jih je Gromov uporabil pri razvoju simplektične geometrije, je *analiza kompleksnih krivulj v skoraj kompleksnih mnogoterostih*. To so mnogoterosti M sode dimenzije $2n$, katerih tangentni prostori T_pM so opremljeni z operatorjem J, čigar kvadrat je enak minus identiteti: $J^2 = -id$. Na modelni kompleksni mnogoterosti $\mathbb{C}^n$ (to je n-razsežni kompleksni evklidski prostor) predstavlja J množenje vektorja z imaginarno enoto $i = \sqrt{-1}$. S pomočjo tega operatorja se Cauchy-Riemannov sistem enačb za holomorfne funkcije $f\colon M \to \mathbb{C}$ zapiše v obliki

$$df_p(Jv) = i\, df_p(v), \qquad p \in M,\ v \in T_pM \approx \mathbb{C}^n.$$

Pri tem je df_p diferencial funkcije f v točki p. Na splošni skoraj kompleksni mnogoterosti (M, J) ta enačba v splošnem nima netrivialenih rešitev, torej M nima niti lokalnih nekonstantnih holomorfnih funkcij. Po drugi strani pa v vsaki skoraj kompleksni mnogoterosti M obstajajo *kompleksne krivulje*, kot npr. preslikave z enotnega diska $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ v M, ki zadoščajo Cauchy-Riemannovi enačbi

$$df_p(iv) = J(df_p(v)), \quad p \in \mathbb{D},\ v \in T_p\mathbb{D} = \mathbb{C}.$$

Osnove teorije skoraj kompleksnih mnogoterosti so bile položene že pred dobrimi petdesetimi leti [46], a matematiki dolgo niso vedeli, kaj s tem početi in so imeli to kot neko slepo vejo. Njihovo prvo zares kreativno uporabo je iznašel Gromov četrt stoletja kasneje pri izgradnji globalne simplektične geometrije (glej [27]). Skoraj kompleksne krivulje so našle pomembno uporabo tudi v definiciji *Flœrove homologije* [56].

Delo Gromova na področju teorije grup s polinomialno rastjo je prineslo nove ideje, ki so za vedno spremenile naše razumevanje diskretnih neskončnih grup. Gromov je prepoznal geometrijske zakonitosti diskretnih grup in rešil vrsto dolgo odprtih problemov. Njegovi geometrijski argumenti so naredili komplicirane kombinatorične argumente veliko bolj naravne in učinkovite. Več o tem v originalnem skoraj 200 strani dolgem članku Gromova [30].

V zadnjem času se je Gromov ukvarjal tudi z novimi izzivi, ki jih matematiki prinaša biologija, še posebej molekularna biologija in genetske raziskave (glej monografijo [5]). V pogovoru, ki sem ga imel z njim dan po podelitvi nagrade na slovesni večerji v prostorih Norveške akademije znanosti, je med drugim priznal, da je genomika zelo hud izziv in da matematiki očitno še nismo iznašli prave vrste matematike za reševanje teh problemov.

Za zaključek naj omenim prispevke Gromova na področju, ki mi je najbližje, saj na njem raziskujem tudi sam.

Gromov je bil glavni akter pri razvoju pojma *homotopski princip*, ali na kratko *h-princip*, katerega veljavnost v nekem analitičnem ali geometričnem problemu pomeni, da obstaja analitična rešitev, v kolikor ni topoloških obstrukcij. O tem je napisal monografijo, objavljeno v

Springerjevi zbirki *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* [29].

Do pred dobrimi dvajsetimi leti je bil h-princip v kompleksni analizi omejen na *princip Oka-Grauert* o klasifikaciji holomorfnih vektorskih svežnjev in njim pridruženih glavnih svežnjev na Steinovih mnogoterostih (glej [47, 24, 25, 26, 35, 42]). *Steinove mnogoterosti* so tiste kompleksne mnogoterosti, ki jih lahko predstavimo kot kompleksne 'ploskve' (poljubne dimenzije) v kakem evklidskem prostoru $\mathbb{C}^n$; to je, kot množice $X \subset \mathbb{C}^n$, definirane s končno mnogo holomorfnimi enačbami oblike

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{j_1,\ldots,j_n=0}^{\infty} c_{j_1,\ldots,j_n}\, z_1^{j_1} z_2^{j_2} \ldots c_n^{j_n} = 0.$$

Vrsta mora konvergirati za vse $z \in \mathbb{C}^n$. Steinove mnogoterosti so torej analitičen analog afino algebraičnim mnogoterostim, ki so rešitve sistemov polinomskih enačb zgornje oblike, a s končnimi vsotami namesto vrst. (Več o Steinovih mnogoterostih v §4.) Glavni rezultat teorije Oka-Grauert je, da se topološka klasifikacija holomorfnih vektorskih svežnjev in glavnih svežnjev na Steinovih mnogoterostih ujema z njihovo holomorfno klasifikacijo. Več o principu Oka-Grauert v §5.

Ključno posplošitev z izjemno zanimivimi posledicami je Gromov orisal v članku [31] v letu 1989. Tako se je rodila *teorija Oka-Grauert-Gromov* o tem, kdaj lahko vsako zvezno preslikavo poljubne Steinove mnogoterosti X v dano kompleksno mnogoterost Y zvezno deformiramo v neko holomorfno preslikavo. Pri tej deformaciji želimo ohraniti preslikavo holomorfno in poljubno blizu začetni preslikavi na ustreznih podmnožicah v X, kjer je le-ta že holomorfna. Če ima Y to lastnost, se imenuje *mnogoterost Oka* (glej §7). Analogno vprašanje nas zanima v primeru, ko imamo holomorfno preslikavo $\pi\colon Z \to X$ neke kompleksne mnogoterosti Z na Steinovo mnogoterost X, tako da je diferencial $d\pi_z\colon T_z Z \to T_{\pi(z)} X$ surjektiven v vsaki točki $z \in Z$; taka preslikava se imenuje *holomorfna submerzija* Z na X. Problem je najti *holomorfne prereze* $f\colon X \to Z$, ki zadoščajo $\pi(f(x)) = x$ za vsak $x \in X$, torej leži $f(x)$ v vlaknu $Z_x = \pi^{-1}(x) \subset Z$. Glavno vprašanje je:

Kdaj lahko vsak zvezen prerez deformiramo v nek holomorfen prerez?

Gromov je našel preprost zadostni pogoj na vlakna Z_x, ki zahteva obstoj dovolj velike množice holomorfnih preslikav $\mathbb{C}^k \to Z_x$; take mnogoterosti imenujemo *eliptične* v smislu Gromova (glej §9).

Kot je pri Gromovu v navadi, je dokaze svoji rezultatov le orisal v glavnih potezah; običajno je potrebno še precej napornega dela drugih matematikov, da se njegovi dosežki postavijo na primerno trdne temelje in da jih razume širši krog matematikov. V danem primeru sem v letu 1997, ko sem se začel za te probleme zanimati, povprašal nekaj ključnih kolegov v svetu, ali so bile podrobnosti že narejene in ali so rezultati Gromova razumljeni. Odgovor je bil negativen: V osmih letih od objave članka [31] se tega očitno še ni nihče zares lotil. A rezultat je bil v vmesnem času že uporabljen v nadaljnjih delih in postalo je tem bolj pomembno, da bi se stvari razčistile in postavile na trdne temelje. V naslednjih nekaj letih sva to naredila z Jasno Prezelj in rezultate objavila v seriji člankov v revijah *Mathematiche Annalen* [17, 18] in *Mathematische Zeitschrift* [19]. Ključni prispevek pri razumevanju najsplošnejšega rezultata Gromova (h-princip za prereze eliptičnih submerzij nad Steinovimi mnogoterostmi) je dala Jasna Prezelj v svoji doktorski disertaciji (Univerza v Ljubljani, 2000).

V nadaljevanju bo opisan razvoj teorije Oka-Grauert-Gromov, njene posplošitve in najpomembnejši primeri uporabe.

2. H-princip za holomorfne preslikave

V tem uvodnem razdelku bomo v osnovnih potezah opisali glavni problem, ki nas bo zanimal. Pojem kompleksne mnogoterosti in holomorfne preslikave bomo natančneje opisali v naslednjem razdelku §3, pojem Steinove mnogoterosti pa v §4.

Modelna kompleksna mnogoterost dimenzije n je kompleksni evklidski prostor $\mathbb{C}^n$, to je kartezični produkt n kopij obsega kompleksnih števil $\mathbb{C}$. Že od nekdaj so pritegovale posebno pozornost tiste kompleksne mnogoterosti X, ki imajo bodisi 'veliko', bodisi 'malo' holomorfnih preslikav $X \to \mathbb{C}$ ali $\mathbb{C} \to X$, oziroma splošneje $\mathbb{C}^n \to X$. Obravnava teh vprašanj nas privede do zanimivih razredov kompleksnih mnogoterosti.

Mnogoterosti z 'veliko' holomorfnimi preslikavami $X \to \mathbb{C}$ (holomorfnimi funkcijami na X) so Steinove mnogoterosti, ki jih je uvedel nemški matematik Karl Stein leta 1951 [54] po vzoru domen holomorfnosti v $\mathbb{C}^n$. Kompleksna mnogoterost je *Steinova*, če globalne holomorfne funkcije na X ločijo točke in podajajo lokalne karte v vsaki točki, poleg tega pa za vsako diskretno zaporedje točk v X obstaja holomorfna funkcija, katere vrednosti po tem zaporedju gredo v ∞ (glej def. 4.2). Ena od pomembnejših karakterizacij Steinovih mnogoterosti je, da so to ravno zaprte kompleksne podmnogoterosti evklidskih prostorov $\mathbb{C}^n$, torej podmnožice, ki jih lahko definiramo kot skupno množico ničel neke družine holomorfnih funkcij na $\mathbb{C}^n$ in ki so brez singularnih točk (izrek 4.3). Steinova lastnost je torej *fleksibilnostni pogoj*. Več o Steinovih mnogoterostih bomo povedali v §4.

Mnogoterosti z 'malo' holomorfnimi preslikavami $\mathbb{C} \to X$ so znane pod imenom hiperbolične mnogoterosti. Povezana kompleksna mnogoterost X je *hiperbolična v smislu Brodyja* [4], če je vsaka holomorfna preslikava $\mathbb{C} \to X$ konstantna. Primer je poljubna omejena domena v $\mathbb{C}$ (Lieouvilleov izrek), ali pa komplement $\mathbb{C}\backslash\{a, b\}$ poljubnih dve različnih točk $a \neq b$ v $\mathbb{C}$ (Picardov izrek). Podobno je komplement kompleksne hiperploskve v $\mathbb{C}^n$ (to je množica ničel neke cele funkcije) zelo pogosto hiperboličen. Znano je celo, da je komplement $\mathbb{C}^2\backslash A$ generično izbrane algebraične krivulje $A \subset \mathbb{C}^2$ dovolj visokega reda hiperbolična domena. Soroden pojem *Kobayashijeve hiperboličnosti* sloni na pojmu *Kobayashijeve psevdometrike* [38]. Hiperboličnost je klasičen primer *rigidnostne lastnosti*, teorija hiperboličnih mnogoterosti pa je eno od dobro razvitih področij kompleksne geometrije.

In kaj lahko rečemo o kompleksnih mnogoterostih Y, ki dopuščajo veliko holomorfnih preslikav $\mathbb{C}^n \to Y$ ter splošneje $X \to Y$ za poljubno Steinovo mnogoterost X? Zadnje vprašanje precizirajmo:

Kdaj je vsaka zvezna preslikava $X \to Y$ s poljubne Steinove mnogoterosti X v Y homotopna neki holomorfni preslikavi?

Naravno je postaviti dodatne aproksimacijske pogoje, ki ustrezajo klasičnemu Rungejevemu (oziroma v višjih dimenzijah Oka-Weilovemu) aproksimacijskemu izreku, ter interpolacijske pogoje, ki ustrezajo razširitvenemu izreku Weierstrassa in Henrija Cartana za holomorfne funkcije (glej §6). Pogosto nas zanima tudi, ali lahko neko zvezno družino zveznih preslikav $X \to Y$ homotopno deformiramo v zvezno družino holomorfnih preslikav. Tovrstne lastnosti kompleksne mnogoterosti Y se imenujejo *lastnosti Oka*; v primeru pozitivnih odgovorov na zgornja vprašanja pravimo tudi, da velja *homotopski princip* (na kratko *h-princip*) za preslikave Steinovih mnogoterosti v Y. Mnogoterosti, ki imajo najsplošnejšo *parametrično lastnost Oka z aproksimacijo in interpolacijo*, se imenujejo *mnogoterosti Oka* (glej def. 8.2). Natančnejši opis lastnosti Oka sledi v §7 in §8.

Zadovoljiva teorija mnogoterosti Oka se je razvila šele v zadnjem času. Izrek 7.4 v §7, ki je podrobno dokazan v člankih [12, 13], podaja praktično optimalen odgovor na vprašanje Gromova [31, p. 881, 3.4.(D)], ali je lastnost Oka neke kompleksne mnogoterosti Y ekvivalentna kakšni preprostejši aproksimacijski lastnosti za holomorfne preslikave $\mathbb{C}^n \to Y$.

Naš pregled teorije je kronološki. V §5 je najprej prikazan klasičen rezultat Hansa Grauerta iz leta 1958, po katerem vse kompleksne Liejeve grupe in njim prirejene kompleksne homogene mnogoterosti zadoščajo h-principu (izrek 5.4). Poseben primer tega rezultata za Liejevo grupo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ (punktirana kompleksna ravnina) je dokazal že Kiyoshi Oka leta 1939 [47]. H-princip velja tudi za prereze holomorfnih svežnjev nad Steinovimi mnogoterostmi, katerih vlakno je Liejeva grupa ali homogena mnogoterost (izrek 5.5). Odtod sledi klasični *princip Oka-Grauert*, da se topološka klasifikacija kompleksnih vektorskih svežnjev na Steinovih mnogoterostih ujema s holomorfno klasifikacijo (izrek 5.1). To je nedvomno eden najpomebnejših in najuporabnejših rezultatov klasične kompleksne analize.

V nadaljevanju (§7 – §13) je prikazana moderna teorija homotopskega principa v kompleksni geometriji. V §7 obravnavamo lastnost Oka in njeno karakterizacijo z mnogo preprostejšo lastnostjo konveksne aproksimacije. V §9 je prikazan h-princip za eliptične mnogoterosti in za prereze eliptičnih submerzij. Ena od ključnih aplikacij je konstrukcija holomorfnih vložitev Steinovih mnogoterosti v evklidske prostore minimalne dimenzije (glej §10). V §11 je obravnavan h-princip za holomorfne imerzije in vložitve Steinovih mnogoterosti v evklidske prostore, v §12 pa h-princip za holomorfne submerzije. V §13 je prikazan nedavni rezultat Ivarssona in Kutzschebaucha o faktorizaciji holomorfnih preslikav Steinovih mnogoterosti v grupo $SL_n(\mathbb{C})$, v katerem je bistvena uporaba h-principa za stratificirane eliptične submerzije.

Bralec bo morda opazil, da je izpuščena obravnava mnogoterosti z malo holomorfnimi funkcijami. Ta razred izgleda mnogo prevelik, da bi bil lahko zares zanimiv, saj zaradi principa maksima vsebuje vse kompaktne mnogoterosti in še dosti več.

3. Kompleksne mnogoterosti in holomorfne preslikave

Splošna n-razsežna kompleksna mnogoterost lokalno izgleda kot odprta podmnožica v $\mathbb{C}^n$, te lokalne koordinate (ali lokalne karte) pa so med seboj povezane s holomorfnimi prehodnimi preslikavami. Enorazsežne kompleksne mnogoterosti se imenujejo *Riemannove ploskve*; med najpreprostejšimi so poleg ravnine $\mathbb{C}$ ter njenih domen še Riemannova sfera $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ki je hkrati enorazsežni kompleksni projektivni prostor $\mathbb{P}^1$, ter kompleksni torusi. Najpreprostejša kompaktna n-razsežna kompleksna mnogoterost je projektivni prostor $\mathbb{P}^n$, ki ga sestavljajo vse kompleksne premice skozi izhodišče v $\mathbb{C}^{n+1}$.

Na tangentnem svežnju TX poljubne kompleksne mnogoterosti X imamo operator $J = J_X$, ki v lokalnih koordinatah predstavlja množenje vektorja $v \in \mathbb{C}^n$ z imaginarno enoto $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Ta operator zadošča lastnosti $J^2 = -I$. Diferenciabilna preslikava $f\colon X \to Y$ med dvema kompleksnima mnogoterostima se imenuje *holomorfna*, če njen diferencial komutira z operatorjema J_X in J_Y:

$$df_x(J_X v) = J_Y(df_x v), \qquad x \in X,\ v \in T_x X.$$

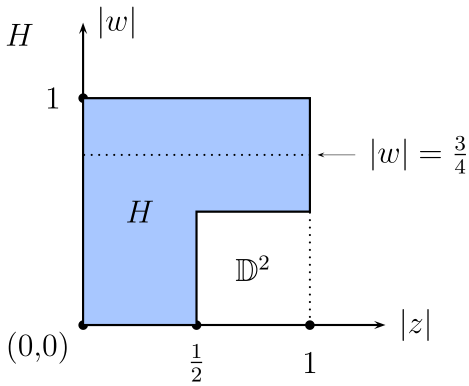
Preprosteje povedano, f je holomorfna, če je njen diferencial v vsaki točki kompleksno linearen. V lokalnih koordinatah so to ravno *Cauchy-Riemannove enačbe* za komponentne funkcije preslikave f po vsaki od kompleksnih spremenljivk; funkcija na domeni v $\mathbb{C}^n$ je torej holomorfna, kadar je separatno holomorfna v vsaki spremenljivki posebej. Druga karakterizacija holomorfnih funkcij je, da imajo razvoj v potenčno vrsto po kompleksnih spremenljivkah v okolici vsake točke območja.

4. Steinove mnogoterosti

Holomorfne preslikave $X \to \mathbb{C}$ na kompleksni mnogoterposti so holomorfne funkcije na X; množico vseh takih funkcij označimo z $\mathcal{O}(X)$. Le-teh je obilo na vsaki domeni (odprti množici) v $\mathbb{C}^n$, saj so med njimi vsi holomorfni polinomi in cele funkcije. Vendar se pri domenah v $\mathbb{C}^n$ za $n > 1$ pojavi nov fenomen, ki kaže, da je oblika roba domene bistveno pomembnejša kot v dimenziji ena. Na vsaki domeni $X \subset \mathbb{C}$ lahko najdemo s pomočjo Weierstrassovega izreka holomorfno funkcijo, ki nima analitičnega nadaljevanja preko nobene robne točke, ker se njene ničle akumulirajo v vsaki točki iz ∂X. V nasprotju s tem imamo v dimenzijah $n > 1$ pojav *simultanega analitičnega nadaljevanja*, ki ga je prvi opisal Friedrich Hartogs (1874-1943) leta 1906 na t.i. *Hartogosovi figuri.* Za $n = 2$ je to domena

$$H = \left\{(z,w)\colon |z| < \frac{1}{2},\ |w| < 1\right\} \cup \left\{(z,w)\colon |z| < 1,\ \frac{1}{2} < |w| < 1\right\}.$$

Hartogsova figura H v bidisku $\mathbb{D}^2$



Vsaka holomorfna funkcija na H ima analitično nadaljevanje do holomorfne funkcije na bidisku $\mathbb{D}^2 = \{(z, w) \colon |z| < 1, |w| < 1\}$, kar lahko vidimo takole. Denimo, da je f holomorfna na H. Funkcija

$$F(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta| = \frac{3}{4}} \frac{f(z, \zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta$$

je holomorfna na bidisku $P = \{|z| < 1,\ |w| < \frac{3}{4}\}$, saj je integrand $f(z, \zeta)$ holomorfen v spremenljivki z, v spremenljivki w pa je F Cauchyjev integral. Ker je za vrednosti $|z| < \frac{1}{2}$ integrand $f(z, w)$ holomorfna funkcija spremenljivke w na disku $\{|w| < 1\}$, nam Cauchyjeva integralna formula pove, da je za te točke $f(z, w) = F(z, w)$. Iz principa identičnosti sledi $f = F$ na njuni skupni (povezani) domeni $H \cap P$. Ker je $H \cup P = \mathbb{D}^2$, dobimo s tem holomorfno funkcijo na bidisku $\mathbb{D}^2$, katere zožitev na Hartogsovo figuro H je enaka f.

Hartogsov fenomen je sprožil intenzivno iskanje odgovora na vprašanje, kako karakterizirati *domene holomorfnosti* v $\mathbb{C}^n$, to je domene s holomorfno funkcijo, ki nima analitičnega nadaljevanja preko nobene robne točke. To vprašanje je bilo ena od glavnih gonilnih sil razvoja kompleksne analize v prvi polovici dvajsetega stoletja. Po izreku Cartan-Thullen (Henri Cartan, 1904-2008; Peter Thullen, 1907–1996) je $X \subset \mathbb{C}^n$ domena holomorfnosti natanko tedaj, ko je *holomorfno konveksna* v smislu, da je za vsako kompaktno podmnožico $K \subset X$ kompaktna tudi njena *holomorfno konveksna ($\mathcal{O}(X)$-konveksna) ogrinjača*

$$\widehat{K} = \widehat{K}_{\mathcal{O}(X)} = \{z \in X \colon |f(z)| \le \sup_{w \in K} |f(w)|,\ \forall f \in \mathcal{O}(X)\}. \tag{4.1}$$

V primeru $X = \mathbb{C}^n$ se $\widehat{K}$ imenuje *polinomsko konveksna ogrinjača.* Iz klasične funkcijske teorije vemo, da je za $n = 1$ množica $\widehat{K}$ unija K ter vseh omejenih povezanih komponent komplementa $\mathbb{C} \backslash K$. Za $n > 1$ ni nobene preproste karakterizacije in teorija polinomske konveksnosti ponuja vrsto zanimivih in težkih problemov (glej [55]).

Primer 4.1. Pokaži, da je $\mathcal{O}(H)$-ogrinjača krožnice $K = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2\colon z = \frac{3}{4},\ |w| = \frac{3}{4}\}$ enaka $\widehat{K}_{\mathcal{O}(H)} = \{(z,w)\colon z = \frac{3}{4},\ \frac{1}{2} < |w| \le \frac{3}{4}\}$. Zaključi, da H ni holomorfno konveksna.

Po vzoru domene holomorfnosti je Karl Stein (1913-2000) leta 1951 uvedel razred mnogoterosti X z naslednjimi lastnostmi (glej [54]).

Definicija 4.2. Kompleksna mnogoterost X se imenuje *Steinova*, če zadošča naslednjim trem pogojem:

(A) globalne holomorfne funkcije na X ločijo vsak par različnih točk,
(B) v okolici vsake točke na X obstaja lokalna karta, ki jo sestavljajo globalne holomorfne funkcije, in
(C) za vsak kompakt $K \subset X$ je tudi ogrinjača $\widehat{K}$ (4.1) kompaktna.

Domena v $\mathbb{C}^n$ je torej Steinova mnogoterost natanko tedaj, ko je domena holomorfnosti, saj sta aksioma (A) in (B) trivialno izpolnjena s pomočjo koordinatnih funkcij na $\mathbb{C}^n$.

Steinove mnogoterosti imajo vrsto zanimivih karakterizacij. Reinhold Remmert je leta 1956 dokazal, da so Steinove mnogoterosti ravno zaprte kompleksne podmnogoterosti kompleksnih evklidskih prostorov $\mathbb{C}^N$ [51], torej so analitičen analog afino-algebraičnih mnogoterosti v algebraični geometriji. Ena od implikacij je očitna, saj polinomi na $\mathbb{C}^N$ zadoščajo aksiomom Steinove mnogoterosti na vsaki zaprti kompleksni podmnogoterosti $X \subset \mathbb{C}^N$. V obratni smeri je Remmert dokazal analog Whitneyevega izreka za gladke mnogoterosti:

Izrek 4.3. Vsaka n razsežna Steinova mnogoterost se da holomorfno vložiti kot zaprta kompleksna podmnogoterost v $\mathbb{C}^{2n+1}$.

Mnogo kasneje so Eliashberg in Gromov [8] ter Schürmann [52] dokazali optimalen vložitveni izrek:

Izrek 4.4. Vsaka Steinova mnogoterost dimenzije $n > 1$ se da vložiti kot zaprta kompleksna podmnogoterost v $\mathbb{C}^N$ za $N = \left[\frac{3n}{2}\right] + 1$.

Že Forster je pokazal, da je N v zgornjem izreku najmanjši možen za vsak n.

Dokaz izreka 4.4 je bistveno zahtevnejši od izreka 4.3 in sloni na uporabi homotopskega principa, ki bo prikazan v §9.

Zanimivo je, da v dimenziji $n = 1$ še ni znana optimalna vložitvena dimenzija. Enorazsežna Steinova mnogoterost je isto kot odprta (nekompaktna) Riemannova ploskev. Vsaka taka ploskev dopušča vložitev kot kompleksna krivulja v $\mathbb{C}^3$ po izreku Remmerta, ni pa znano, ali dopušča tudi vložitev v $\mathbb{C}^2$. V tej smeri glej [20, 21, 44].

Druga pomembna karakterizacija Steinovih mnogoterosti je kohomološka in je znana kot *Cartanov izrek B* (glej npr. [34]):

Izrek 4.5. Kompleksna mnogoterost X je Steinova natanko tedaj, ko za vsak koherenten analitičen snop modulov $\mathcal{F}$ nad X velja

$$H^q(X, \mathcal{F}) = 0, \qquad q = 1, 2, \ldots.$$

Ta izrek je izjemnega pomena pri globalizaciji analitičnih rezultatov, saj omogoča sestavljanje lokalnih rešitev v globalne rešitve. Od klasičnih primerov omenimo *Mittag-Lefflerjev izrek* o obstoju meromorfnih funkcij z lokalno predpisanimi glavnimi deli ter razširitveni (oz. interpolacijski) izrek za holomorfne funcije na analitičnih podmnožicah.

Na tem mestu se nimamo namena spuščati v teorijo snopov, omenimo le relevantno definicijo. Označimo z $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ snop zarodkov holomorfnih funkcij na X; njegova bilka $\mathcal{O}_x$ nad točko $x \in X$ je torej množica vseh zarodkov holomorfnih funkcij v x. Zarodek je predstavljen s funkcijo v neki okolici dane točke, pri čemer ne ločimo dveh funkcij, ki se ujemata na neki manjši skupni okolici. Vsak *koherenten analitičen snop* nad X lahko nad dovolj majhnimi odprtimi množicami $U \subset X$ predstavimo kot kvocient nekega prostega snopa $\mathcal{O}^N|_U$ po nekem podsnopu, ki je slika homomorfizma snopov $\mathcal{O}^k|_U \to \mathcal{O}^N|_U$. To pomeni, da imamo kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov:

$$\mathcal{O}^k|_U \to \mathcal{O}^N|_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$$

Tretjo, povsem geometrijsko karakterizacijo Steinovih mnogoterosti, ki je obenem splošna rešitev *Levijevega problema*, pa je podal H. Grauert v letu 1958 [24] (za domene v $\mathbb{C}^n$ je to dokazal K. Oka [47]):

Izrek 4.6. Kompleksna mnogoterost X je Steinova natanko tedaj, ko obstaja strogo plurisubharmonična funkcija izčrpanja $\rho \colon X \to \mathbb{R}_+$.

Biti funkcija izčrpanja pomeni, da so podnivojnice $\{x \in X \colon \rho(x) \leq c\}$ ($c \in \mathbb{R}_+$) kompaktne. Stroga plurisubharmoničnost pa pomeni, da je *Levijeva forma* $i\partial\bar{\partial}\rho$ pozitivna. Natančneje, v poljubnih lokalnih holomorfnih koordinatah $z = (z_1, \ldots, z_n)$ na X in za vsak neničelen tangenten vektor $0 \neq \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n$ velja

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \eta_j \bar{\eta}_k > 0.$$

Ta hermitska kvadratična forma ohranja signaturo pri biholomorfnih zamenjavah koordinat; v resnici je to ravno biholomorfno invarianten del realne Hessejeve forme. Vsaka nivojnica strogo plurisubharmonične funkcije je v poljubni nesingularni točki lokalno biholomorfno ekvivalentna neki strogo geometrijsko konveksni hiperploskvi.

Ni težko videti tudi, da lahko ρ izberemo kot *Morsejevo funkcijo* (z nedegeneriranimi kritičnimi točkami) in da je Morsejev indeks vsake kritične točke strogo plurisubharmonične funkcije $\leq n$, torej največ polovica realne dimenzije mnogoterosti X. Iz Morsejeve teorije (glej npr. [45]) sledi, da ima n razsežna Steinova mnogoterost homotopski tip največ n-razsežnega CW-kompleksa, torej je topološko sorazmerno preprosta. Izjemno zanimive in netrivialne rezultate v obratni smeri pa sta dokazala Yakov Eliashberg [7] in Robert Gompf [22]. Grauertova karakterizacija odpira pomembno zvezo s kontaktno in simplektično geometrijo ter 4-dimenzionalno topologijo (glej npr. [7, 22, 23]).

Kot očiten primer ne-Steinovih mnogoterosti omenimo kompaktne kompleksne mnogoterosti; zaradi principa maksimuma te nimajo nekonstantnih holomorfnih funkcij in jih zato ni mogoče vložiti v evklidske prostore. Naravno vprašanje je, ali jih lahko predstavimo kot kompleksne podmnogoterosti v kakšni drugi modelni mnogoterosti. Če vzamemo za model kompleksno projektivne prostore $\mathbb{P}^N$, dobimo razred *projektivno algebraičnih mnogoterosti.* To še zdaleč ne pokrije vseh primerov; kljub uspehom v klasifikacijski teoriji kompleksnih mnogoterosti je ta živalski vrt dosti prevelik in preveč kompliciran, da bi bil obvladljiv z danes znanimi metodami.

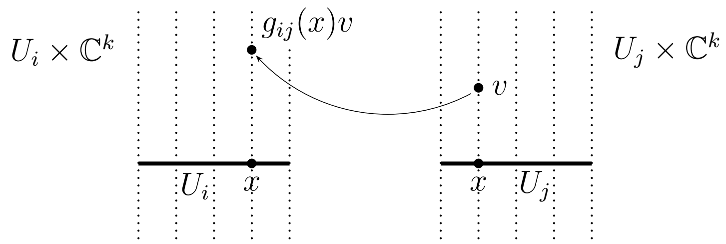
5. Princip Oka-Grauert

Hevristični *princip Oka* zatrjuje, da so določeni analitični problemi na Steinovih mnogoterostih analitično rešljivi, če ni topoloških obstrukcij. Izvorni primer tega principa, ki ga je Rene Thóm imel za enega najlepših principov analize, predstavlja rezultat K. Oke [47] in H. Grauerta [25, 26] o klasifikaciji kompleksnih vektorskih svežnjev nad Steinovimi mnogoterostmi (izrek 5.1). Nekoliko lažje berljiv dokaz tega izreka je dosegljiv v članku H. Cartana [6], najkrajši (čeprav manj geometričen) dokaz pa v preglednem članku [42]. Za nas je posebno pomemben nekoliko drugačen dokaz, ki sta ga podala Henkin in Leiterer leta 1998 v članku [35].

Modelni kompleksni vektorski sveženj ranga $k \in \mathbb{N}$ nad mnogoterostjo X je *produktni* (ali *trivialni*) sveženj, to je kartezični produkt $E = X \times \mathbb{C}^k$ skupaj s projekcijo $\pi\colon E \to X$. Splošni vektorski sveženj $\pi\colon E \to X$ izgleda kot produkt $E|_U \approx U \times \mathbb{C}^k$ nad majhnimi odprtimi množicami $U \subset X$, dve sveženjski karti $U \times \mathbb{C}^k$ in $V \times \mathbb{C}^k$ pa sta zlepljeni skupaj s prehodno preslikavo oblike

$$(x, v) \mapsto \big(x, g(x)\, v\big), \qquad x \in U \cap V,\ v \in \mathbb{C}^k,$$

kjer je $g\colon U \cap V \to GL_k(\mathbb{C})$ zvezna matrična funkcija z vrednostmi v grupi vseh obrnljivih kompleksnih $k \times k$ matrik. (Tu je $g(x)\, v$ produkt matrike $g(x)$ z vektorjem $v \in \mathbb{C}^k$.)



Če izberemo odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_j\}$ mnogoterosti X, tako da je sveženj trivialen nad vsako množico U_j ($E|_{U_j} \approx U_j \times \mathbb{C}^k$), potem prehodne funkcije $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to GL_k(\mathbb{C})$ sestavljajo multiplikativen 1-kocikel:

$$g_{ii} = 1 \text{ (identična matrika)}, \ g_{ij}\, g_{ji} = 1, \ g_{ij}\, g_{jk}\, g_{ki} = 1.$$

Obratno, vsak 1-kocikel (g_{ij}) kot zgoraj določa kompleksni vektorski sveženj, ki ima g_{ij} za prehodne funkcije, v kar se lahko prepričamo z direktno konstrukcijo z lepljenjem trivialnih svežnjev $U_j \times \mathbb{C}^n$, kot je prikazano na sliki.

Posebej pomembni so svežnji ranga $k = 1$, ki jih imenujemo tudi *svežnji premic*; tedaj so g_{ij} skalarne funkcije brez ničel.

Sveženj je *holomorfen*, če ga lahko podamo nad nekim odprtim pokritjem s holomorfnimi prehodnimi funkcijami g_{ij}. Totalni prostor E holomorfnega vektorskega svežnja je spet kompleksna mnogoterost; če je baza X Steinova, je tudi E Steinova.

Najpomembnejše svežnje dobimo z algebraičnimi operacijami po vlaknih (direktna ali Whitneyeva vsota, tenzorski produkt, vnanji produkt idr.), izhajajoč iz tangentnega svežnja TX in kotangentnega svežnja T^*X. Npr., *kanonični sveženj* $K_X = \Lambda^n(T^*X)$, kjer je $n = \dim X$ in Λ^n označuje n-to vnanjo potenco, igra pomembno vlogo pri pojmu Kodairove dimenzije X in pri klasifikacijski teoriji kompaktnih kompleksnih mnogoterosti.

Dva holomorfna vektorska svežnja $E \to X$, $E' \to X$ ranga k sta holomorfno izomorfna, če obstaja holomorfna preslikava $\Phi\colon E \to E'$, ki vsako vlakno E_x preslika $\mathbb{C}$-linearno in izomorfno na pripadajoče vlakno E'_x. Analogno uvedemo pojem topološkega izomorfizma, to je homeomorfizem $E \to E'$, ki je $\mathbb{C}$-izomorfen na vlaknih. Ni težko videti, da je vsak izomorfizem trivialnega svežnja $X \times \mathbb{C}^k$ samega nase oblike

$$(x, v) \mapsto (x, \phi(x)\, v), \quad x \in X,\ v \in \mathbb{C}^k,$$

kjer je $\phi\colon X \to GL_k(\mathbb{C})$ zvezna (oz. holomorfna) funkcija z vrednostmi v grupi $GL_k(\mathbb{C})$. Izomorfizem $E \to E'$ med poljubnima svežnjema opišemo tako, da najprej oba svežnja predstavimo nad skupnim odprtim pokritjem $\mathcal{U} = \{U_i\}$ baze X. Glede na izbrani trivializaciji $E|_{U_i} \approx U_i \times \mathbb{C}^k$, $E'|_{U_i} \approx U_i \times \mathbb{C}^k$ je zožitev Φ na $E|_{U_i}$ podana s preslikavo

$$(x, v) \mapsto (x, \phi_i(x)\, v), \qquad x \in U_i,\ v \in \mathbb{C}^k,$$

kjer je $U_i \ni x \to \phi_i(x) \in GL_k(\mathbb{C})$. Preprosto vidimo, da so preslikave ϕ_i v naslednji zvezi s prehodnimi preslikavami g_{ij} (za E) oz. g'_{ij} (za E'):

$$\phi_i = g'_{ij}\, \phi_j\, g_{ij}^{-1} \quad \text{on } U_{ij}. \tag{5.1}$$

Obratno, vsaka kolekcija (ϕ_i), ki zadošča (5.1), podaja izomorfizem $E \to E'$. V jeziku nekomutativne kohomologije zveza (5.1) pomeni, da sta kocikla (g_{ij}) in (g'_{ij}) kohomologna preko 0-koverige (ϕ_i).

V primeru $k = 1$ (svežnji premic) je $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ in tedaj je zaradi komutativnosti produkta relacija (5.1) ekvivalentna

$$\frac{g'_{ij}}{g_{ij}} = \frac{\phi_i}{\phi_j}.$$

Iz primerjave z definicijo prve kohomološke grupe vidimo, da je množica ekvivalenčnih razredov holomorfnih vektorskih svežnjev premic podana z elementi grupe

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) =: \mathrm{Pic}(X),$$

imenovane tudi *Picardova grupa* mnogoterosti X (z operacijo tenzorski produkt). Pri tem označuje $\mathcal{O}^*$ snop zarodkov neničelnih holomorfnih funkcij na X. Analogno nam grupa $H^1(X, \mathcal{C}^*)$ s koeficienti v snopu zarodkov neničelnih zveznih funkcij $\mathcal{C}^*$ podaja ekvivalenčne razrede topoloških kompleksnih svežnjev premic nad X.

V splošnem je množica holomorfnih vektorskih svežnjev ranga k podana z elementi prve kohomološke grupe $H^1(X, \mathcal{O}^{GL_k(\mathbb{C})})$, kjer je $\mathcal{O}^{GL_k(\mathbb{C})}$ snop zarodkov holomorfnih preslikav $X \to GL_k(\mathbb{C})$. Podobno so topološki razredi kompleksnih vektorskih svežnjev podani s prvo kohomološko grupo $H^1(X, \mathcal{C}^{GL_k(\mathbb{C})})$ s koeficienti v snopu zarodkov zveznih preslikav $X \to GL_k(\mathbb{C})$. Ti dve grupi sta nekomutativni za $k > 1$.

Eden od najpogosteje uporabljenih rezultatov o holomorfnih vektorskih svežnjih je naslednji izrek Hansa Grauerta [26] (v primeru $k = 1$ je ta rezultat dokazal Kiyoshi Oka leta 1939 [47]):

Izrek 5.1. Naj bo X Steinova mnogoterost.

(i) Vsak topološki kompleksen vektorski sveženj nad X ima ekvivalentno strukturo holomorfnega vektorskega svežnja.
(ii) Dva holomorfna vektorska svežnja nad X, ki sta topološko izomorfna, sta tudi holomorfno izomorfna.

Izrek povemo na kratko s trditvijo

$$H^1(X, \mathcal{O}^{GL_k(\mathbb{C})}) \approx H^1(X, \mathcal{C}^{GL_k(\mathbb{C})}),$$

pri čemer je izomorfizem induciran z inkluzijo $\mathcal{O}^{GL_k(\mathbb{C})} \hookrightarrow \mathcal{C}^{GL_k(\mathbb{C})}$.

Za $k = 1$ je izrek 5.1 preprosta posledica elementarne kohomološke teorije ter izreka Henrija Cartana o tem, da na Steinovi mnogoterosti velja $H^q(X, \mathcal{O}) = 0$ za vse $q = 1, 2, \ldots$ (glej §4). Oglejmo si naslednje kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}^* \longrightarrow 1,$$

kjer je ι inkluzija konstantnega snopa celih števil $\mathbb{Z}$ v snop zarodkov holomorfnih funkcij $\mathcal{O}$, σ pa je eksponentna preslikava $\sigma(f) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f}$. To zaporedje se v literaturi imenuje *exponential sheaf sequence.* Eksaktnost pomeni, da je ι injektivna, σ surjektivna ter je slika ι enaka jedru σ (slednje sledi iz dejstva, da je $\mathrm{e}^{2\pi i z} = 1$ natanko tedaj, ko je $z \in \mathbb{Z}$). Relevanten del prirejenega *dolgega eksaktnega zaporedja* na kohomologiji izgleda takole:

$$H^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}). \tag{5.2}$$

Ker je X Steinova, je po Cartanovem izreku B $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ in $H^2(X, \mathcal{O}) = 0$. Odtod sledi, da je vezni homomorfizem c_1 izomorfizem:

$$\mathrm{Pic(X)} = H^1(X, \mathcal{O}^*) \approx H^2(X, \mathbb{Z}).$$

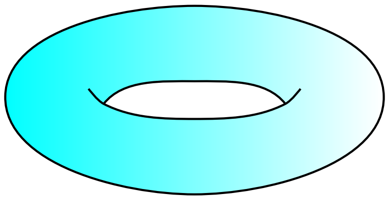
Omenimo še, da se za vsak sveženj premic $\xi \in \mathrm{Pic}(X)$ njegova slika $c_1(\xi) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ imenuje *prvi Chernov razred* svežnja ξ.

Če zamenjamo svežnja $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$ s svežnjema zarodkov zveznih funkcij $\mathcal{C}$ oz. $\mathcal{C}^*$, dobimo z analognim sklepom $H^1(X, \mathcal{C}^*) \approx H^2(X, \mathbb{Z})$. Odtod sledi $H^1(X, \mathcal{O}) \approx H^1(X, \mathcal{C}^*)$, kar je trditev izreka.

Če je X odprta Riemannova ploskev, je njen homotopni tip predstavljen s šopom krožnic. Zato je $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ in posledično $\mathrm{Pic(X)} = 0$, to je, *vsak holomorfen sveženj premic na odprti Riemannovi ploskvi X je holomorfno trivialen.* Odtod z indukcijo na rang sledi

Korolar 5.2. Vsak holomorfen vektorski sveženj na odprti Riemannovi ploskvi X je holomorfno trivialen.

Opomba 5.3. Izrek 5.1 ne velja na splošnih kompleksnih mnogoterostih, niti za svežnje ranga 1. Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 1$ (za $g = 1$ je X kompleksen torus).



Tedaj je $H^1(X, \mathcal{O}) = \mathbb{C}^g$, $H^1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$, homomorfizem $H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O})$ induciran z inkluzijo $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}$ pa je injektiven homomorfizem $\mathbb{Z}^{2g} \hookrightarrow \mathbb{C}^g$, ki preslika $\mathbb{Z}^{2g}$ na neko mrežo $\Gamma \subset \mathbb{C}^g$. Nadalje, grupa $H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ je generirana s fundamentalnim razredom ploskve X, medtem ko je $H^2(X, \mathcal{O}) = 0$. (Glej npr. O. Forster [9].) Iz (5.2) dobimo eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathbb{T}^g = \mathbb{C}^g/\Gamma \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} \mathbb{Z} \to 0.$$

Jedro $\mathbb{T}^g \subset H^1(X, \mathcal{O}^*)$ homomorfizma c_1 je g-razsežni kompleksni torus (*Jacobijev torus* ploskve X), ki parametrizira razrede holomorfnih razredov svežnjev na topološko trivialnem svežnju $X \times \mathbb{C}$.

V splošnem primeru $k > 1$ ta preprosti kohomološki dokaz ne deluje zaradi nekomutativnosti grupe $GL_k(\mathbb{C})$. Dokaz Grauertovega izreka je tedaj bistveno težji, glavna ideja dokaza pa je naslednja.

Poglejmo najprej trditev (i). Naj bo $G_{k,N}$ kompleksna Grassmanova mnogoterost, katere elementi so vsi k-razsežni kompleksni podprostori v $\mathbb{C}^N$. Liejeva grupa $GL_N(\mathbb{C})$ deluje holomorfno in tranzitivno na $G_{k,N}$ kot produkt z leve (ali z desne), torej je $G_{k,N}$ kompleksna homogena mnogoterost. Naj bo $U_{k,N} \to G_{k,N}$ *univerzalni sveženj*, katerega vlakno nad točko $\lambda \in G_{k,N}$ sestavljajo vsi vektorji $v \in \mathbb{C}^N$, ki pripadajo podprostoru $\lambda \subset \mathbb{C}^N$. Iz diferencialne topologije je znano, da lahko vsak topološki kompleksni vektorski sveženj $\pi \colon E \to X$ ranga k dobimo kot povlek $E = f^*U_{k,N}$ za nek $N \in \mathbb{N}$ in neko zvezno preslikavo $f \colon X \to G_{k,N}$. (Spomnimo bralca, da je vlakno svežnja $f^*U_{k,N}$ nad točko $x \in X$ ravno vlakno svežnja $U_{k,N}$ v sliki $f(x)$, presajeno nad x.)

$$\begin{tikzcd} f^*U_{k,N} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & U_{k,N} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & G_{k,N} \end{tikzcd}$$

Prav tako vemo, da so za vsako homotopijo $f_t\colon X \to G_{k,N}$ ($t \in [0,1]$) svežnji $E_t = f_t^*(U_{k,N})$ med seboj topološko izomorfni. Če je f holomorfna preslikava, je tudi prirejeni sveženj $f^*U_{k,N} \to X$ holomorfen.

Iz navedenih ugotovitev sledi, da je trditev (i) v izreku 5.1 posledica naslednjega rezultata H. Grauerta [24], ki ga uporabimo za ($GL_N(\mathbb{C})$-homogeno) Grassmanovo mnogoterost $G = G_{k,N}$.

Izrek 5.4. (h-princip za homogene mnogoterosti) Vsaka zvezna preslikava Steinove mnogoterosti v kompleksno homogeno mnogoterost je homotopna neki holomorfni preslikavi.

Preden komentiramo izrek 5.4, si oglejmo še redukcijo trditve (ii) v izreku 5.1. Imamo kompleksna vektorska svežnja E in E' ranga k nad X, predstavljena s holomorfnima kocikloma (g_{ij}) oz. (g'_{ij}) nad odprtim pokritjem $\mathcal{U} = \{U_i\}$ baze X, ter topološki izomorfizem $\Phi\colon E \to E'$, podan s kolekcijo zveznih funkcij $\phi_i\colon U_i \to GL_k(\mathbb{C})$, tako da velja (5.1).

Naj bo sedaj $\pi\colon Z \to X$ holomorfen sveženj nad X z vlaknom $G = GL_k(\mathbb{C})$, ki je trivialen nad vsako množico U_i ter ima prehodne preslikave določene s (5.1). Natančneje, za vsak $x \in U_i \cap U_j$ se poljuben element $(x, v) \in U_j \times G$ identificira z elementom $\big(x, g'_{ij}(x)\, v\, g_{ij}^{-1}(x)\big) \in U_i \times G$. Zveza (5.1) tedaj pomeni, da kolekcija funkcij $\phi_i\colon U_i \to G$ določa nek zvezen prerez $\phi\colon X \to Z$ svežnja $Z \to X$.

Seveda lahko ta film odvrtimo tudi nazaj in ugotovimo, da vsak prerez svežnja $Z \to X$ ustreza nekemu izomorfizmu $E \to E'$. Holomorfni prerezi ustrezajo ravno holomorfnim izomorfizmom. Trditev (ii) sedaj sledi iz naslednjega Grauertovega izreka [24]:

Izrek 5.5. (h-princip za prereze G-svežnjev) Naj bo $\pi\colon Z \to X$ holomorfen sveženj nad Steinovo mnogoterostjo X, čigar vlakno $Z_x = \pi^{-1}(x)$ je kompleksna Liejeva grupa ali kompleksna homogena mnogoterost. Potem je vsak zvezen prerez $\phi\colon X \to Z$ homotopen nekemu holomorfnemu prerezu $\phi'\colon X \to Z$.

Izrek 5.4 je poseben primer Izreka 5.5 za prereze trivialnega svežnja $Z = X \times G$, saj le-ti ustrezajo preslikavam $X \to G$ bazne mnogoterosti X v vlakno G.

Dokaz izrekov 5.4 in 5.5 bomo orisali v drugem delu članka v sklopu splošnejših rezultatov o h-principu za prereze *eliptičnih submerzij* nad Steinovimi mnogoterostmi. Gre za metodo aproksimacije in lepljenja lokalnih holomorfnih prerezov, s čimer sestavimo globalni holomorfni prerez v danem homotopnem razredu. Pri aproksimaciji uporabimo netrivialne posplošitve Rungejevega izreka, ki je v višji dimenziji znan pod imenom *Oka-Weilov izrek*; bistveno vlogo pri tem igra eksponentna preslikava na Liejevih grupah, oziroma splošneje *dominantni holomorfni spreji*, ki jih je uvedel M. Gromov [31]. Problem lepljenja holomorfnih prerezov najprej lineariziramo s pomočjo izreka o implicitni funkciji v Banachovih prostorih ter uporabimo rešitve sistemov nehomogenih Cauchy-Riemannovih enačb.

Princip Oka-Grauert ima takorekoč vsakodnevno uporabo v kompleksni in analizi in geometriji; veliko drugih aplikacij klasične teorije lahko najde bralec v preglednem članku J. Leitererja [42].

6. Dva klasična rezultata kompleksne analize

V §5 smo prikazali *princip Oka-Grauert* o tem, da se holomorfna klasifikacija vektorskih svežnjev na Steinovih mnogoterostih ujema z njihovo topološko klasifikacijo. Videli smo, da ta rezultat sledi iz h-principa za prereze holomorfnih svežnjev, katerih vlakno je kompleksna Liejeva grupa ali homogena mnogoterost:

Vsak zvezen prerez je homotopen nekemu holomorfnemu prerezu.

V posebnem je vsaka zvezna preslikava Steinove mnogoterosti v kompleksno homogeno mnogoterost homotopna neki holomorfni preslikavi.

Ta osnovna oblika h-principa ni povsem zadovoljiva, saj med drugim velja za vsako holomorfno kontraktibilno mnogoterost, npr. za enotni disk $\mathbb{D}$: Vsaka zvezna preslikava $X \to \mathbb{D}$ je homotopna holomorfni preslikavi (namreč konstanti). Osnovni h-princip torej ne loči med kompleksno ravnino $\mathbb{C}$ in diskom $\mathbb{D}$, kar ni posebej obetavno.

Za motivacijo nadaljnje diskusije se spomnimo dveh klasičnih rezultatov kompleksne analize. Prvi je *Rungejev aproksimacijski izrek*, ki pove, da lahko vsako holomorfno funkcijo, definirano v okolici kompaktne polinomialno konveksne množice K v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$, aproksimiramo enakomerno na K s holomorfnimi polinomi. Analogen rezultat na $\mathbb{C}^n$ je znan kot *izrek Oka-Weil.* S pomočjo vložitvenega izreka (Izrek 4.3) Preprosto vidimo, da velja tudi na Steinovih mnogoterostih:

Vsaka holomorfna funkcija v okolici kompaktne $\mathcal{O}(X)$-konveksne množice K v Steinovi mnogoterosti X je enakomerna limita na K nekega zaporedja holomorfnih funkcij na X.

Spomnimo se še na *Weierstrassov interpolacijski izrek:* Če je $\{a_j\}$ neka diskretna množica točk v domeni $X \subset \mathbb{C}$, potem za poljubna števila $b_j \in \mathbb{C}$ obstaja holomorfna funkcija f na X, ki zadošča $f(a_j) = b_j$ za vsak j.

Na kompleksnih mnogoterostih prevzamejo vlogo diskretnih podmnožic *zaprte analitične podmnožice* $A \subset X$. Taka množica je v neki odprti okolici $U \subset X$ poljubne točke $x \in X$ enaka množici ničel neke končne družine holomorfnih funkcij $f_1, \ldots f_k \in \mathcal{O}(U)$:

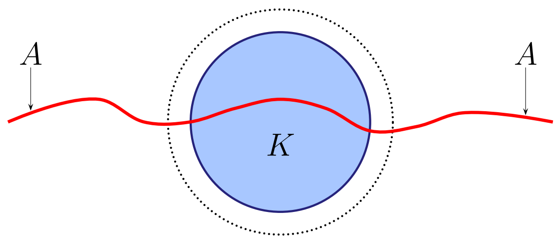
$$A \cap U = \{x \in U\colon f_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, k\}.$$

Funkcija $f\colon A \to \mathbb{C}$ na analitični množici je holomorfna, če za vsako točko $x \in A$ obstaja odprta okolica $x \in U \subset X$ in holomorfna funkcija F na U, tako da je $F = f$ na $A \cap U$.

Če je X Steinova mnogoterost, potem je po *Cartanovem razširitvenem izreku* vsaka holomorfna funkcija $f\colon A \to \mathbb{C}$ na zaprti analitični podmnožici $A \subset X$ enaka zožitvi na A neke funkcije $F \in \mathcal{O}(X)$. Cartanov izrek je neposredna posledica dejstva $H^1(X, \mathcal{J}_A) = 0$ (Cartanov Izrek B), kjer je $\mathcal{J}_A$ *snop idealov* analitične podmnožice A, to je (koherenten analitičen) snop zarodkov holomorfnih funkcij na X, katerih zožitev na A je identično enaka 0. To nam omogoča zložiti posamezne lokalne razširitve funkcije f v globalno razširitev $F \in \mathcal{O}(X)$.

Omenjena dva izreka lahko združimo v naslednji enovit izrek:

Izrek 6.1. Naj bo X Steinova mnogoterost, $K \subset X$ kompaktna holomorfno konveksna množica in $A \subset X$ zaprta analitična podmnožica. Če je f holomorfna funkcija na neki okolici množice K v X in na podmnožici A, potem za vsak $\epsilon > 0$ obstaja funkcija $F \in \mathcal{O}(X)$, tako da je $F|_A = f$ in $\sup_K |F - f| < \epsilon$.



7. Lastnost Oka in konveksna aproksimacija

Sedaj nas zanima naslednje vprašanje:

S katerimi kompleksnimi mnogoterostmi Y lahko nadomestimo obseg kompleksnih števil $\mathbb{C}$ v izreku 6.1?

Če je Y topološko netrivialna, se lahko zgodi, da neke preslikave $A \cup K \to Y$ ne moremo razširiti niti do zvezne preslikave $X \to Y$, zato moramo vnaprej predpostaviti obstoj zvezne razširitve. A tudi to ni dovolj, kot pokaže naslednji preprost primer.

Primer 7.1. Za vsak $r > 1$ označimo z $A(r)$ kolobar

$$A(r) = \{z \in \mathbb{C} \colon \frac{1}{r} < |z| < r\}.$$

Iz klasične funkcijske teorije je znano, da je v primeru $1 < r < R$ vsaka holomorfna preslikava $f \colon A(R) \to A(r)$ homotopno trivialna (kontraktibilna). Z drugo besedo, večjega kolobarja ne moremo holomorfno stisniti v manjši kolobar s homotopno netrivialno preslikavo. Splošneje, za poljuben par števil $r > 1$, $R > 1$ obstaja holomorfna preslikava $f \colon A(R) \to A(r)$ stopnje $k \in \mathbb{N}$ natanko tedaj, ko je $R^k \le r$; v slednjem primeru lahko vzamemo kar $z \mapsto z^k$. Torej ima največ končno mnogo homotopskih razredov v $[A(R), A(r)] = [S^1, S^1] = \mathbb{Z}$ holomorfnega predstavnika. Glavna obstrukcija je hiperboličnost $A(r)$. V primeru $r = +\infty$ pa je $A(r) = \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ in vsaka zvezna preslikava $A(R) \to \mathbb{C}^*$ je homotopna neki holomorfni preslikavi (izrek 5.4).

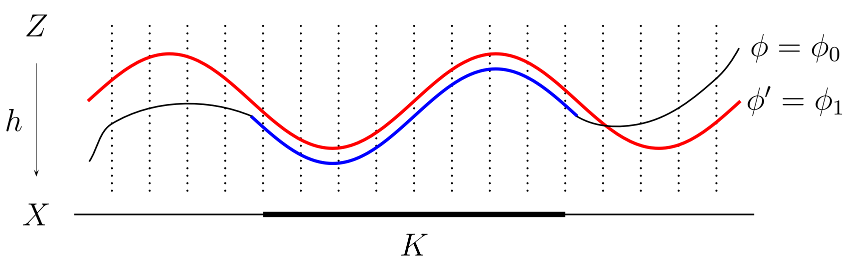
Definicija 7.2. Kompleksna mnogoterost Y ima *lastnost Oka*, če za vsako trojico X, A, K kot v izreku 6.1 in za vsako zvezno preslikavo $f \colon X \to Y$, ki je holomorfna na neki okolici množice K v X in na analitični podmnožici $A \subset X$, obstaja za vsak $\epsilon > 0$ homotopija $f_t \colon X \to Y$ ($t \in [0, 1]$) zveznih preslikav, tako da velja:

(a) $f_0 = f$ in f_1 je holomorfna na X,
(b) za vsak $t \in [0, 1]$ je $f_t|_A = f|_A$, in
(c) za vsak $t \in [0, 1]$ je f_t holomorfna v neki okolici K in

$$\sup_{x \in K} d_Y(f_t(x), f(x)) < \epsilon.$$

(Tu je d_Y poljubna metrika na Y, ki inducira mnogoterostno topologijo.) V tem primeru pravimo tudi, da za preslikave Steinovih mnogoterosti v Y velja *h-princip z aproksimacijo in interpolacijo.*

Analogno definiramo lastnost Oka za prereze $\phi \colon X \to Z$ nekega svežnja $h \colon Z \to X$ nad Steinovo mnogoterostjo.

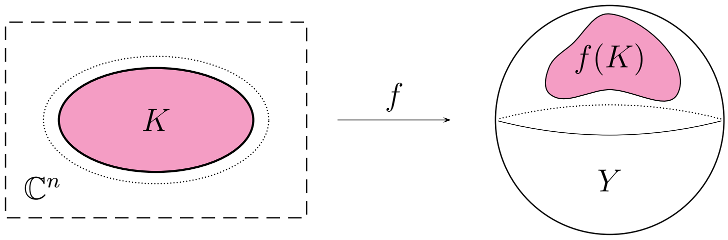


Grauert je dokazal [25], da ima vsaka kompleksna Liejeva grupa in splošneje vsaka homogena mnogoterost lastnost Oka. (Za punktirano ravnino $\mathbb{C}^*$ glej Oka [47].) Ključni nadaljnji korak je prispeval Mikhael Gromov, ki je v svojem delu [31] (1989) uvedel pojem *eliptične mnogoterosti* in dokazal, da ima vsaka taka mnogoterost lastnost Oka. Njegovi rezultati bodo predstavljeni v §9.

Po drugi strani nobena hiperbolična mnogoterost Y nima lastnosti Oka, saj nekonstantne holomorfne preslikave diska $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ v Y (leteh je obilo) ne moremo aproksimirati na nobenem manjšem disku s holomorfnimi preslikavami $\mathbb{C} \to Y$ (slednje so namreč konstantne zaradi hiperboličnosti Y). Podobno vidimo, da tudi t.i. *volumska hiperboličnost* izključuje lastnost Oka, saj slednja ne dopušča holomorfnih preslikav $\mathbb{C}^n \to Y$ maksimalnega ranga $n = \dim Y$.

Za motivacijo nadaljnje diskusije si oglejmo modelni primer, ko je K kompaktna *geometrijsko konveksna* množica v evklidskem prostoru $X = \mathbb{C}^n$ ter je $A = \emptyset$. (S pomočjo funkcij $e^{\lambda(z)}$, kjer je $\lambda\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ kompleksno linearna, se prepričamo, da je vsaka kompaktna konveksna množica v $\mathbb{C}^n$ tudi polinomialno konveksna.) Ker se vsaka zvezna preslikava $K \to Y$ razširi do zvezne preslikave $\mathbb{C}^n \to Y$, je topološka predpostavka v def. 7.2 nepotrebna. Lastnost Oka v tem primeru sovpada z naslednjo lastnostjo:

Definicija 7.3. Kompleksna mnogoterost Y ima *lastnost konveksne aproksimacije*, če lahko vsako holomorfno preslikavo z okolice poljubne kompaktne konveksne množice $K \subset \mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ v Y aproksimiramo, enakomerno na K, s holomorfnimi preslikavami $\mathbb{C}^n \to Y$.



Ta aproksimacijski pogoj Rungejevega tipa sem uvedel v [12] in ga imenoval *'Convex Approximation Property'* (CAP). Dokaj presenetljivo pa je, da je ta preprost potreben pogoj tudi zadosten:

Izrek 7.4. Kompleksna mnogoterost Y ima lastnost Oka natanko tedaj, ko ima lastnost CAP:

$$\text{CAP} \Longleftrightarrow \text{OKA}.$$

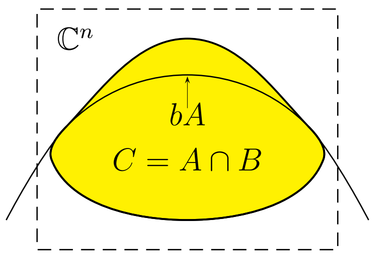
Če ima Y lastnost Oka, potem velja h-princip z aproksimacijo in interpolacijo za prereze poljubnega holomorfnega svežnja z vlaknom Y nad Steinovo bazo.

V resnici zadošča preveriti CAP le na določenem razredu preprostih kompaktnih konveksnih množic, kar olajša verifikacijo z uporabo teorije holomornih avtomorfizmov.

Izrek 7.4, ki je podrobno dokazan v člankih [12, 13], podaja praktično optimalen odgovor na vprašanje Gromova [31, p. 881, 3.4.(D)], ali je lastnost Oka neke kompleksne mnogoterosti Y ekvivalentna kakšni preprostejši aproksimacijski lastnosti za holomorfne preslikave $\mathbb{C}^n \to Y$.

V dokazu je na bistven način uporabljeno dejstvo, da lahko izčrpamo Steinovo mnogoterost s strogo plurisubharmonično Morsejevo funkcijo $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ (glej §2 v prvem delu). Če ima ρ le regularne vrednosti na nekem intervalu $[c_1, c_2]$ (to pomeni, da je $d\rho_x \neq 0$ za vsak $x \in X$, ki zadošča $c_1 \leq \rho(x) \leq c_2$), potem lahko dobimo podnivojnico $X_{c_2} = \{\rho \leq c_2\}$ iz manjše podnivojnice $X_{c_1} = \{\rho \leq c_1\}$ s sukcesivnim dodajanjem majhnih kompaktnih množic, ki v primerno izbranih lokalnih koordinatah na X ustrezajo kompaktnim konveksnim množicam v $\mathbb{C}^n$ ($n = \dim X$). Tudi presek dodane množice s prejšnjo množico je konveksen. Take množice imenujemo *konveksne buške.*

Konveksna buška B dodana množici A



Recimo, da je preslikava $f\colon X \to Y$ že holomorfna na neki podnivojnici X_{c_1}. Na konveksnem preseku te množice s prvo dodano buško uporabimo lastnost CAP, nato pa z analitičnimi tehnikami zlepimo skupaj obe delni holomorfni preslikavi v novo preslikavo, ki je holomorfna na uniji. Po končno korakih dobimo preslikavo, ki je holomorfna na X_{c_2} ter poljubno dobro aproksimira prvotno preslikavo na X_{c_1}. Ne preseneča, da je prehod čez kritične točke funkcije ρ bolj zapleten in dolgo ni bil v celoti razumljen. Globalno holomorfno preslikavo $f\colon X \to Y$ v danem homotopskem razredu dobimo kot limito zaporedja preslikav, ki so holomorfne na vedno večjih podmnožicah mnogoterosti X. Podrobnosti seveda bistveno presegajo nivo in prostor tega zapisa.

Izrek 7.4 ima naslednjo ekvivalentno obliko o dvigih preslikav.

Izrek 7.5. (h-princip za dvige) Naj bo $\pi\colon E \to B$ holomorfen sveženj, čigar vlakno Y ima lastnost CAP. Če je $f\colon X \to B$ holomorfna preslikava Steinove mnogoterosti v bazo B, potem je vsak njen zvezen dvig $F\colon X \to E$ ($\pi \circ F = f$) homotopen nekemu holomorfnemu dvigu.

Če je F holomorfna na okolici kompaktne $\mathcal{O}(X)$-konveksne podmnožice $K \subset X$ in na zaprti analitični podmnožici $A \subset X$, lahko homotopijo dvigov izberemo tako, da miruje na A in je ϵ-blizu F na K.

Situacijo v izreku 7.5 ter idejo dokaza prikazuje naslednji diagram:

$$
\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[l] \\
X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "F"] & B &
\end{tikzcd}
$$

Vsak dvig $F\colon X \to E$ preslikave f namreč ustreza nekemu prerezu $\phi\colon X \to f^*E$ povlečenega holomorfnega svežnja $f^*E \to X$, čigar vlakno nad $x \in X$ je ravno vlakno $\pi^{-1}(f(x)) \subset E$, presajeno nad x. Izrek 7.5 torej sledi neposredno iz druge trditve v izreku 7.4.

S pomočjo izreka o dvigu homotopij ter preprostim sklepanjem dobimo odtod naslednjo funktorialno lastnost mnogoterosti Oka.

Posledica 7.6. Naj bo $\pi\colon E \to B$ holomorfen sveženj, čigar vlakno Y ima lastnost Oka. Potem ima baza B lastnost Oka natanko tedaj, ko ima totalni prostor E lastnost Oka.

Posebej omenimo naslednji primer, ko je vlakno diskretno:

Posledica 7.7. Če je $\pi\colon E \to B$ holomorfna krovna projekcija, potem ima B lastnost Oka natanko tedaj, ko ima E lastnost Oka.

Primeri 7.8. Pregled mnogoterosti z lastnostjo Oka (ter drugimi fleksibilnostnimi lastnostmi) lahko bralec najde v [14, §6]. Tu bomo navedli le nekaj primerov.

(A) Vse kompleksne Liejeve grupe in njihove homogene mnogoterosti imajo lastnost Oka (Grauert [25]).

(B) Riemannova ploskev ima lastnost Oka natanko tedaj, ko ni hiperbolična, torej ko je ena od ploskev $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{P}^1$ ali torus $\mathbb{C}/\Gamma$.

(C) Če je $E \to B$ holomorfen sveženj, kjer sta baza B in vlakno Y ena od Riemannovih ploskev v točki (B), potem ima totalni prostor E lastnost Oka. Npr., vse *Hirzebruchove ploskve* imajo lastnost Oka, saj so holomorfni $\mathbb{P}^1$-svežnji nad $\mathbb{P}^1$.

(D) Če je Y n-razsežna kompleksno algebraična mnogoterost, v kateri ima vsaka točka neko Zariskijevo odprto okolico, ki je algebraično izomorfna afinemu prostoru $\mathbb{C}^n$, potem ima Y lastnost Oka. Primeri so kompleksne Grassmanove mnogoterosti.

(E) Če je Y kot v (D) in je $A \subset Y$ zaprta algebraična podmnožica dimenzije $\leq n-2$, potem ima komplement $Y = X \backslash A$ lastnost Oka.

(F) Če ima Y končno mnogo $\mathbb{C}$-kompletnih (popolnoma integrabilnih) holomorfnih vektorskih polj, ki v vsaki točki $y \in Y$ napenjajo tangentni prostor T_yY, potem ima Y lastnost Oka. (To je poseben primer eliptične mnogoterosti v smislu Gromova; glej trditev 9.5.)

8. Parametrični h-princip

Obstaja še ena pomembna oblika h-principa za preslikave $X \to Y$, to je *parametrični h-princip*. Gre za to, da želimo neko družino zveznih preslikav $f_p \colon X \to Y$, ki je zvezno odvisna od parametra p v nekem topološkem prostoru P, homotopno deformirati v zvezno družino holomorfnih preslikav $\widetilde{f}_p \colon X \to Y$. Če so preslikave f_p že holomorfne na X za vse vrednosti parametra p v nekem podprostoru $P_0 \subset P$, dodatno zahtevamo, da homotopija miruje za take vrednosti p. Tako kot prej lahko dodamo zahteve po aproksimaciji ter interpolaciji. Situacijo ilustrira naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r] \arrow[d, "incl"'] & \mathcal{O}(X,Y) \arrow[d, "incl"] \\ P \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\widetilde{f}"] & \mathcal{C}(X,Y) \end{tikzcd}$$

Tu je $\mathcal{C}(X,Y)$ (oz. $\mathcal{O}(X,Y)$) prostor vseh zveznih (oz. holomorfnih) preslikav $X \to Y$ s kompaktno-odprto topologijo.

Čeprav izgleda parametrični h-princip dosti strožja zahteva, je znan v vseh primerih, ko velja navadni h-princip, v kolikor razumno omejimo dopustne pare parametričnih prostorov. V [15] sem dokazal:

Izrek 8.1. Če ima kompleksna mnogoterost Y lastnost Oka (def. 7.2), potem ima tudi parametrično lastnost Oka v smislu, da preslikave poljubne Steinove mnogoterosti v Y zadoščajo parametričnemu h-principu z aproksimacijo in interpolacijo za vsak par kompaktnih množic parametrov $P_0 \subset P$ v $\mathbb{R}^n$.

Ker je po izreku 7.4 lastnost Oka ekvivalentna lastnosti konveksne aproksimacije CAP, sledi

$$\text{CAP} \Longleftrightarrow \text{PARAMETRIČNA LASTNOST OKA.}$$

Isto velja za prereze svežnjev z vlaknom Y nad Steinovo bazo.

Vse v literaturi obravnavane lastnosti Oka so med navidezno najšibkejšo (CAP) in navidezno najmočnejšo, ki jo podaja izrek 8.1. Posledično so torej vse te lastnosti med seboj ekvivalentne. Zato je smiselno uvesti poseben razred mnogoterosti, ki zadoščajo katerikoli od lastnosti Oka:

Definicija 8.2. Kompleksna mnogoterost se imenuje *mnogoterost Oka*, če zadošča katerikoli od ekvivalentnih lastnosti Oka.

Izrek 8.1 ima naslednjo zanimivo posledico, ki jo dobimo, če za prostora parametrov izberemo enkrat $P = S^k$ (realna k-sfera) in $P_0 = \emptyset$, drugič pa $P = B^{k+1}$ (krogla v $\mathbb{R}^{n+1}$) in $P_0 = \partial B_{k+1} = S_k$.

Posledica 8.3. Če je Y mnogoterost Oka, potem je za vsako Steinovo mnogoterost X naravna inkluzija $\mathcal{O}(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{C}(X,Y)$ šibka homotopska ekvivalenca, to je, inducirani homomorfizem fundamentalnih grup

$$\pi_k(\iota)\colon \pi_k(\mathcal{O}(X,Y)) \to \pi_k(\mathcal{C}(X,Y))$$

je izomorfizem za vsak $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Bralca, ki obvlada homotopsko teorijo, bodo morda zanimali članki F. Lárussona [39, 40, 41], kjer je za obravnavo funktorialnih lastnosti razreda mnogoterosti Oka zgrajena ustrezna modelna kategorija.

Iz Enriques-Kodairove klasifikacije (glej npr. [3] za kompleksne ploskve) sledi, da nobena kompaktna mnogoterost Oka ni splošnega tipa v smislu Kodaire, zato so mnogoterosti Oka potencialno zanimive v klasifikacijski teoriji. Zaenkrat je ta razred slabo raziskan.

9. Eliptične mnogoterosti in h-princip Gromova

Najpomembnejši geometrijski zadostni pogoj za veljavnost lastnosti Oka (oz. h-principa) je uvedel leta 1989 Mikhael Gromov [31].

Za motivacijo si oglejmo naslednji preprost argument. Naj bo Y kompleksna mnogoterost. Izberimo naravno število $n \geq \dim_{\mathbb{C}} Y$ in označimo z $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n$ odprto enotno kroglo v $\mathbb{C}^n$. Za vsako točko $y \in Y$ obstaja holomorfna preslikava $g_y\colon \mathbb{B} \to Y$ z zalogo vrednosti v neki koordinatni okolici točke y, tako da je $g_y(0) = y$ in je njen diferencial $(dg_y)_0$ v točki $0 \in \mathbb{C}^n$ surjektiven (g_y je torej submerzija v točki 0). Če Y zadošča lastnosti konveksne aproksimacije CAP (def. 7.3), potem lahko g_y aproksimiramo na vsaki manjši krogli $r\mathbb{B}$ $(0 < r < 1)$ s celo preslikavo $s_y\colon \mathbb{C}^n \to Y$, ki zadošča pogojema

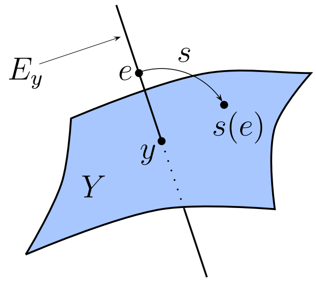
(i) $s_y(0) = y$, in
(ii) diferencial $(ds_y)_0\colon T_0\mathbb{C}^n \approx \mathbb{C}^n \to T_yY$ je surjektiven.

Od tu je le še korak do pojma dominantnega spreja:

Definicija 9.1. *Sprej* na kompleksni mnogoterosti Y je holomorfna preslikava $s\colon E \to Y$, kjer je $E \to Y$ nek holomorfen vektorski sveženj nad Y, tako da velja $s(0_y) = y$ za vsak $y \in Y$. (Tu je 0_y izhodišče vlakna

$E_y \approx \mathbb{C}^n$.) Sprej s je *dominanten*, če je $ds_{0_y}\colon E_y \to T_yY$ surjektivna za vsak $y \in Y$. Mnogoterost Y je *eliptična*, če ima dominanten sprej.

Sprej s na Y



V posebnem primeru ko je sveženj E trivialen, $E = Y \times \mathbb{C}^n$, je sprej $s\colon E \to Y$ družina holomorfnih preslikav $s_y\colon \mathbb{C}^n \to Y$, ki so holomorfno odvisne od točke $y \in Y$ in zadoščajo navedenima pogojema.

Gromov je v članku [31] skiciral dokaz dejstva, da ima vsaka eliptična mnogoterost parametrično lastnost Oka. Splošneje, če je $h\colon Z \to X$ holomorfen sveženj z eliptičnim vlaknom Y nad Steinovo bazo X, potem njegovi prerezi $\phi\colon X \to Z$ zadoščajo vsem oblikam h-principa. Podroben dokaz sva podala z Jasno Prezelj v članku [17], objavljenem v letu 2000. Ta rezultat v bistvu sledi tudi iz novejših izrekov 7.4 in 8.1, saj je dokaj preprosto dokazati naslednje:

Izrek 9.2. Vsaka eliptična mnogoterost ima lastnost CAP:

$$\text{eliptičnost} \Longrightarrow \text{CAP}.$$

Ni znano, ali velja tudi obratna implikacija:

Ali je vsaka mnogoterost z lastnostjo Oka tudi eliptična?

Ta implikacija je znana (in preprosta) za Steinove mnogoterosti. Medtem ko je za lastnost Oka znanih vrsta funktorialnih lastnosti (glej Lárusson [39, 40, 41]), za eliptičnost te lastnosti zaenkrat niso znane.

Najsplošnejša verzija h-principa M. Gromova [31] govori o prerezih *eliptičnih submerzij*. Holomorfna preslikava $h\colon Z \to X$ je submerzija, če je njen diferencial v vsaki točki surjektiven. (V nasprotju s situacijo v svežnjih, kjer so vsa vlakna $Z_x = h^{-1}(x)$ med seboj izomorfna, se lahko vlakno submerzije spreminja od točke do točke. Tipičen primer so *eliptične fibracije*, katerih vlakna so kompleksni torusi, holomorfno odvisni od bazne točke.) Holomorfna submerzija je *eliptična* v smislu Gromova, če ima vsaka točka $x_0 \in X$ odprto okolico $U \subset X$, tako da za vsak $x \in U$ obstaja dominanten sprej $s_x\colon E_x \to Z_x$ na vlaknu Z_x, ki je holomorfno odvisen od točke $x \in U$. Poseben primer je sveženj z eliptičnim vlaknom Y, kjer lahko izberemo sprej na vlaknu $E_x \approx Y$

neodvisno od točke x v okolici $U \supset x_0$, nad katero je sveženj trivialen (torej izomorfen $U \times Y$).

Sedaj lahko navedemo glavni rezultat Gromova [31, Izrek 4.5].

Izrek 9.3. Če je $Z \to X$ eliptična submerzija na Steinovo mnogoterost X, potem prerezi $X \to Z$ zadoščajo vsem oblikam h-principa.

Podroben dokaz je bil prvič predstavljen v doktorski disertaciji Jasne Prezelj (Univerza v Ljubljani, 2000) in je z nekaj posplošitvami objavljen v člankih [18, 19]. Dokaz za submerzije je bistveno težji kot v lokalno trivialnem primeru svežnjev z eliptičnim vlaknom. V zadnjem času je bil izrek 9.3 posplošen na stratificirane eliptične submerzije nad Steinovimi prostori s singularnostmi (glej [16]) in nad 1-konveksnimi mnogoterostmi (glej Prezelj [50]).

Razdelek zaključimo s primeri sprejev in eliptičnih mnogoterosti.

Primeri 9.4. (A) Naj bo G neka kompleksna Liejeva grupa. Označimo z $\mathbf{g} = T_1 G \approx \mathbb{C}^n$ njeno Liejevo algebro in z $\exp\colon \mathbf{g} \to G$ prirejeno eksponentno preslikavo. Denimo, da G deluje holomorfno in tranzitivno na neki mnogoterosti Y kot grupa holomorfnih avtomorfizmov. Tedaj je naslednja preslikava dominanten sprej na Y in je zato Y eliptična:

$$s(y,v) = y\cdot \exp(v), \quad y \in Y,\ v \in \mathbf{g} \approx \mathbb{C}^n.$$

(B) Naslednja trditev je pomemben vir eliptičnih mnogoterosti, ki niso nujno homogene.

Trditev 9.5. Če obstaja na kompleksni mnogoterosti Y končno mnogo $\mathbb{C}$-komplektnih vektorskih polj $v_1, \ldots, v_k$, ki napenjajo tangenten prostor $T_y Y$ v poljubni točki $y \in Y$, potem je Y eliptična.

Najprej si oglejmo relevantne pojme. *Holomorfno vektorsko polje* v je v lokalnih koordinatah $z = (z_1, \ldots, z_n)$ oblike $v = \sum_{j=1}^n v_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$, kjer so v_j holomorfne funkcije. Njegov *tok* je rešitev začetnega problema

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,y) = \dot\phi(t,y) = v(\phi(t,y), \quad \phi(0,y) = y.$$

V koordinatah je to avtonomni sistem navadnih diferencialnih enačb

$$\dot\phi_j(t,z) = v_j(\phi(t,z)), \quad \phi_j(0,z) = z_j \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Zgornjo enačbo lahko obravnavamo v realnem ali v kompleksnem času.

Polje v se imenuje $\mathbb{C}$-*kompletno* ali *popolnoma integrabilno*, če tok $\phi(t,y)$ obstaja za vsak $t \in \mathbb{C}$ pri poljubnem začetnem pogoju $\phi(0,y) = y \in Y$. Tedaj je družina $\phi_t = \phi(t,\cdot)\colon Y \to Y$ $(t \in \mathbb{C})$ enoparametrična grupa holomorfnih avtomorfizmov mnogoterosti Y, to je, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ za vsak $t, s \in \mathbb{C}$. Primer je vektorsko polje

$$v(z_1, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_{n-1}) \frac{\partial}{\partial z_n}, \qquad z \in \mathbb{C}^n \tag{9.1}$$

s tokom $\phi(t, z) = \big(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n + tf(z_1, \ldots, z_{n-1})\big)$; vsak avtomorfizem te oblike (v poljubnem linearnem koordinatnem sistemu na $\mathbb{C}^n$) se imenuje *holomorfen strig*. Drug primer je polje

$$v(z_1, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_{n-1})\, z_n \frac{\partial}{\partial z_n}, \qquad z \in \mathbb{C}^n$$

s tokom $\phi(t, z) = \big(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n e^{tf(z_1, \ldots, z_{n-1})}\big)$; taki avtomorfizmi se imenujejo *posplošeni strigi*. S tem dobimo na $\mathbb{C}^n$ za $n > 1$ zelo veliko holomorfnih avtomorfizmov. (V nasprotju s tem so edini avtomorfizmi ravnine $\mathbb{C}$ linearne funkcije $z \to \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$.) Znano je, da je podgrupa, generirana s strigi in posplošenimi strigi, gosta v grupi $\mathrm{Aut}\, \mathbb{C}^n$ holomorfnih avtomorfizmov prostora $\mathbb{C}^n$ (Andersén in Lempert [2]).

Dokaz Trditve 9.5 je sedaj preprost. Naj bo ϕ_j^t ($t \in \mathbb{C}$) tok kompletnega polja v_j na Y za $j = 1, \ldots, k$. Preslikava $s\colon Y \times \mathbb{C}^k \to Y$,

$$s(y, t_1, \ldots, t_k) = \phi_1^{t_1} \circ \phi_2^{t_2} \circ \cdots \circ \phi_k^{t_k}(y), \tag{9.2}$$

zadošča $s(y, 0) = y$, torej je sprej na Y. Poleg tega velja $\frac{\partial}{\partial t_j} s(y, 0) = v_j(y)$ po definiciji toka. Torej je s dominaten v točki y natanko tedaj, ko vektorji $v_1(y), \ldots, v_k(y)$ napenjajo tangentni prostor $T_y Y$.

(C) Naj bo A neka kompleksno algebraična podmnožica v $\mathbb{C}^n$, to je množica skupnih ničel končne družine holomorfnih polinomov. Če je $n > 1$ in je kompleksna dimenzija A v vsaki točki $\leq n - 2$, potem je komplement $Y = \mathbb{C}^n \backslash A$ eliptičen. V nasprotnem primeru, ko A vsebuje kakšno kompleksno hiperploskev, je njen komplement lahko hiperboličen in zato nima lastnosti Oka.

V resnici je to poseben primer mnogoterosti iz primera (B), saj lahko najdemo končno mnogo strižnih polj $v_1, \ldots, v_k$ (9.1) s polinomskimi koeficienti na $\mathbb{C}^n$, ki so na A enaka nič, v vsaki točki domene $Y = \mathbb{C}^n \backslash A$ pa napenjajo tangenti prostor. Kompozicija njihovih tokov (9.2) je sprej na $\mathbb{C}^n$, ki je dominanten na Y ter ohranja točke iz A pri miru. Njegova zožitev na Y je zato dominanten sprej na Y.

(D) Odprt problem je, ali je komplement $\mathbb{P}^n \backslash A$ poljubne algebraične podmnožice dimenzije $\leq n - 2$ v projektivnem prostoru $\mathbb{P}^n$ dimenzije $n > 1$ eliptičen. Podobno kot v primeru (C) najdemo končno mnogo sprejev $s_j\colon E_j \to \mathbb{P}^n$, definiranih na holomorfnih svežnjih premic $E_j \to \mathbb{P}^n$, ki skupaj dominirajo v vsaki točki iz $\mathbb{P}^n \backslash A$ v smislu, da je vektorska vsota podprostorov $(ds_j)_{0_j}(E_{j,y}) \subset T_y\mathbb{P}^n$ po vseh j enaka $T_y\mathbb{P}^n$ za vsako točko $y \in \mathbb{P}^n \backslash A$. Vendar svežnji E_j niso trivialni in zato posamičnih sprejev s_j ne moremo komponirati v dominanten sprej, kot smo to storili s tokovi v primeru (C).

Mnogoterost s končno dominantno družino sprejev (v pravkar opisanem smislu) se imenuje *subeliptična*. Ta razred sem uvedel v [10] in dokazal, da izrek 9.3 velja tudi za subeliptične mnogoterosti in submerzije. Ni znano, ali je vsaka subeliptična mnogoterost tudi eliptična, a v konkretnih primerih je subeliptičnost lažje preveriti.

10. Holomorfne vložitve Steinovih mngoterosti

Tu se bomo osredotočili na novejše uporabe splošne verzije h-principa.

S pomočjo izreka 9.3 je bil dokazan optimalni vložitveni izrek, da ima vsaka n-razsežna Steinova mnogoterost X za $n > 1$ pravo holomorfno vložitev v evklidski prostor $\mathbb{C}^{\left[\frac{3n}{2}\right]+1}$ [8, 52] (glej I, §2). Dokaz sloni na naslednjem posebnem primeru izreka 9.3:

Izrek 10.1. Naj bo $h\colon E \to X$ holomorfen vektorski sveženj nad Steinovo mnogoterostjo X. Če je $\Sigma \subset E$ zaprta analitična podmnožica, tako da je za vsak $x \in X$ njeno vlakno Σ_x algebraična podmnožica kodimenzije ≥ 2 v vlaknu $E_x \approx \mathbb{C}^n$, potem prerezi $\phi\colon X \to E$, katerih slika $\phi(X)$ ne seka množice Σ, zadoščajo vsem oblikam h-principa.

Pod navedenimi pogoji je submerzija $h\colon Z = E\backslash\Sigma \to X$ eliptična (Primer 9.4 (C)) in lahko uporabimo izrek 9.3. Trditev ne velja, če imajo vlakna Σ_x kodimenzijo ena v E_x; protiprimer lahko najdemo že z odstranitvijo štirih primerno izbranih kompleksnih krivulj iz totalnega prostora trivialnega svežnja $\mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ nad diskom.

Ideja dokaza vložitvenega izreka je naslednja. Najprej izberemo skoraj pravo holomorfno preslikavo $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon X \to \mathbb{C}^n$ ($n = \dim X$), kar pomeni, da ima praslika $f^{-1}(K)$ poljube kompaktne množice $K \subset \mathbb{C}^n$ kompaktne povezane komponente (glej [34, p. 220]). Zatem poiščemo dodatne holomorfne funkcije $h = (h_1, \ldots, h_m)\colon X \to \mathbb{C}^m$ za primerno velik m, tako da je $(f, h)\colon X \to \mathbb{C}^{n+m}$ prava holomorfna vložitev. Nato skušamo število dodanih funkcij zmanjšati s tem, da jih nadomestimo s primerno izbranimi funkcijami na X oblike

$$g_j(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{j,k}(f(x))h_j(x), \qquad j = 1, \ldots, q,$$

kjer so $\alpha_{j,k}$ holomorfne funkcije na $\mathbb{C}^n$. Ogledamo si pogoje, ki jim morajo zadoščati koeficienti $\alpha = (\alpha_{j,k})$, da je preslikava $(f, g)\colon X \to$

$\mathbb{C}^{n+q}$ prava holomorfna vložitev. Če $\mathbb{C}^n$ primerno razslojimo, tako da je preslikava $f\colon X \to \mathbb{C}^n$ nad vsakim slojem 'ekvisingularna', potem se pogoji na $\alpha(z)$ reducirajo na izogibanje neke algebraične podmnožice Σ_z v vlaknu $\mathbb{C}^{mq}$. Če je $n > 1$ in $q \geq [\frac{n}{2}] + 1$, so vse te množice dovolj visoke kodimenzije, da lahko najdemo α z uporabo izreka 10.1.

11. Homotopski princip za holomorfne imerzije

Izrek 10.1 je uporabljen tudi v dokazu h-principa za holomorfne imerzije Steinovih mnogoterosti v kompleksne evklidske prostore:

Izrek 11.1. (Eliashberg in Gromov, [29, p. 66]) Steinova mnogoterost X ima holomorfno imerzijo v $\mathbb{C}^q$ za $q > n = \dim X$ natanko tedaj, ko ima njen tangentni sveženj TX injektivni homomorfizem v trivialni sveženj $X \times \mathbb{C}^q$; slednje vselej velja za $q \geq [\frac{3n}{2}]$.

Ena od implikacij je očitna, saj je diferencial imerzije $X \to \mathbb{C}^q$ taka injektivna vložitev. V obratni smeri pa je dokaz zelo netrivialen. V kategoriji gladkih mnogoterosti je analogen h-princip znan kot Hirsch-Smaleov izrek.

12. Holomorofne funkcije brez kritičnih točk

Podoben h-princip velja za holomorfne submerzije:

Izrek 12.1. (Forstnerič [11]) Steinova mnogoterost X ima holomorfno submerzijo v $\mathbb{C}^q$ za $1 \leq q < n = \dim X$ natanko tedaj, ko ima njen tangentni sveženj TX surjektiven homomorfizem na trivialni sveženj $X \times \mathbb{C}^q$; slednje vselej velja za $q \leq [\frac{n}{2}]$.

Za $q = 1$ dobimo naslednji izrek, ki podaja pozitiven odgovor na vprašanje Gromova [29, p. 70].

Izrek 12.2. Na vsaki Steinovi mnogoterosti obstaja holomorfna funkcija brez kritičnih točk.

Za odprte Riemannove ploskve sta to dokazala leta 1967 Gunning in Narasimhan [33], v splošnem pa je dokazan v [11] (glej tudi posplošitev I. Majcen [43]).

Izreka 11.1 in 12.1 ne veljata za imerzije $X^n \to \mathbb{C}^n$ v primeru $n > 1$. Že dolgo odprto vprašanje se glasi:

Denimo, da ima Steinova mnogoterost X dimenzije $n > 1$ trivialen tangentni sveženj. Ali obstaja holomorfna imerzija $X \to \mathbb{C}^n$?

13. Faktorizacija holomorfnih preslikav v $SL_n(\mathbb{C})$

Omenimo še najnovejšo aplikacijo izreka 9.3 oziroma njegove posplošitve za prereze stratificiranih eliptičnih submerzij. Björn Ivarsson in Frank Kutzschebauch [36, 37] sta pred nedavnim rešila t.i. *holomorfni Vasersteinov problem* o tem, da lahko vsako homotopno trivialno holomorfno preslikavo $X \to SL_m(\mathbb{C})$ Steinove mnogoterosti v posebno linearno grupo faktoriziramo v končen produkt holomorfnih preslikav v unipotentne matrike:

Izrek 13.1. Naj bo X Steinova mnogoterost in $f\colon X \to SL_m(\mathbb{C})$ ničhomotopna holomorfna preslikava. Potem obstaja naravno število N in holomorfne preslikave $G_1, \ldots, G_N\colon X \to \mathbb{C}^{m(m-1)/2}$, tako da je

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ G_1(x) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & G_2(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & G_N(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

produkt zgoraj in spodaj trikotnih unipotentnih matrik. V posebnem, če je X kontraktibilna (kot npr. $X = \mathbb{C}^n$), potem to velja za vsako holomorfno preslikavo $f\colon X \to SL_m(\mathbb{C})$.

Ta faktorizacijski problem za funkcije z matričnimi vrednostmi so pred tem avtorji obravnavali za razne kolobarje funkcij (zvezne, polinomske,...); glej pregled v citiranih člankih. Avtorja sta najprej uporabila rešitev za zvezne preslikave $X \to SL_m(\mathbb{C})$, nato pa sta s pomočjo h-principa nadomestila zvezno rešitev s holomorfno rešitvijo. Podrobnosti dokaza so impresivne, bistveni del pa je verifikacija eliptičnosti (v smislu Gromova, glej def. 9.1) vlaken določenih holomorfnih submerzij.

References

1. Nils Henrik Abel. http://sl.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel
2. Andersén, E., Lempert, L.: On the group of holomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$. Inventiones Math. **110**, 371–388 (1992)
3. Barth, W., Hulek, K., Peters, C. A. M., Van de Ven, A.; Compact Complex Surfaces. 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin (2004)
4. Brody, R.: Compact manifolds in hyperbolicity. Trans. Amer. Math. Soc. **235**, 213–219 (1978)
5. Carbone, A., Gromov, M.: Mathematical slices of molecular biology. With an introduction in French by Éric Westhof. Gaz. Math. No. **88** (2001)
6. Cartan, H.: Espaces fibrés analytiques. Symposium Internat. de topologia algebraica (Mexico, 1958), 97–121; H. Cartan, Oeuvres **2**, Springer-Verlag, New York (1979)
7. Eliashberg, Y.: Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2. Internat. J. Math. **1**, 29–46 (1990)
8. Eliashberg, Y., Gromov, M.: Embeddings of Stein manifolds. Ann. Math. **136**, 123–135 (1992)

9. Forster, O.: Lectures on Riemann surfaces. Graduate Texts in Mathematics **81**, Springer-Verlag, New York (1991)
10. Forstnerič, F.: The Oka principle for sections of subelliptic submersions. Math. Z. **241**, 527–551 (2002)
11. Forstnerič, F.: Noncritical holomorphic functions on Stein manifolds. Acta Math. **191**, 143–189 (2003)
12. Forstnerič, F.: Runge approximation on convex sets implies Oka's property. Ann. Math. (2) **163**, 689–707 (2006)
13. Forstnerič, F.: Extending holomorphic mappings from subvarieties in Stein manifolds. Ann. Inst. Fourier **55**, 733–751 (2005)
14. Forstnerič, F.: Holomorphic flexibility properties of complex manifolds. Amer. J. Math. **128**, 239–270 (2006)
15. Forstnerič, F.: Oka Manifolds. C. R. Acad. Sci. Paris, ser. Math., **347**, 1017–1020 (2009)
16. Forstnerič, F.: The Oka principle for sections of stratified fiber bundles. Pure Appl. Math. Quarterly (Special Issue in honor of Joseph J. Kohn), **6**, no. 3, 843—874 (2010). arXiv: Math.CV/0705.0591
17. Forstnerič, F., Prezelj, J.: Oka's principle for holomorphic fiber bundles with sprays. Math. Ann. **317**, 117–154 (2000)
18. Forstnerič, F., Prezelj, J.: Oka's principle for holomorphic submersions with sprays. Math. Ann. **322**, 633–666 (2002)
19. Forstnerič, F., Prezelj, J.: Extending holomorphic sections from complex subvarieties. Math. Z. **236**, 43–68 (2001)
20. Forstnerič, F., Wold, E. F.: Bordered Riemann surfaces in $\mathbb{C}^2$. J. Math. Pures Appl. **91**, 100–114 (2009)
21. Globevnik, J., Stensønes, B.: Holomorphic embeddings of planar domains into $\mathbb{C}^2$. Math. Ann. **303**, 579–597 (1995)
22. Gompf, R. E.: Handlebody construction of Stein surfaces. Ann. Math. **148** (2), 619–693 (1998)
23. Gompf, R. E., Stipsicz, A. I., 4-manifolds and Kirby calculus. Graduate Studies in Math. **20**, Amer. Math. Soc., Providence (1999)
24. Grauert, H.: On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds. Ann. of Math. **68**, 460–472 (1958)
25. Grauert, H.: Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. Math. Ann. **133**, 450–472 (1957)
26. Grauert, H.: Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. Math. Ann. **135**, 263–273 (1958)
27. Gromov, M.: Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. Invent. Math. **82**, 307–347 (1985)
28. Gromov, M.: Soft and hard symplectic geometry. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 81–98, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
29. Gromov, M.: Partial differential relations. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **9**. Springer-Verlag, Berlin New York (1986)
30. Gromov, M.: Hyperbolic groups. Essays in group theory, 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **8**, Springer, New York (1987)
31. Gromov, M.: Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles. J. Amer. Math. Soc. **2**, 851-897 (1989)

32. Gromov receives 2009 Abel Prize. Notices Amer. Math. Soc. **56**, no. 6, 730–731 (2009)
33. Gunning, R. C., Narasimhan, R.: Immersion of open Riemann surfaces. Math. Ann. **174**, 103–108 (1967)
34. Gunning, R. C., Rossi, H.: Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1965)
35. Henkin, G. M., Leiterer, J.: The Oka-Grauert principle without induction over the basis dimension. Math. Ann. **311**, 71–93 (1998)
36. Ivarsson, B., Kutzschebauch, F.: A solution of Gromov's Vaserstein problem. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **336** (2008)
37. Ivarsson, B., Kutzschebauch, F.: A solution of Gromov's Vaserstein problem. Preprint.
38. Kobayashi, S.: Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings. An introduction. Second ed. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ (2005)
39. Lárusson, F.: Excision for simplicial sheaves on the Stein site and Gromov's Oka principle. Internat. J. Math. **14**, 191–209 (2003)
40. Lárusson, F.: Model structures and the Oka principle. J. Pure Appl. Algebra **192**, 203–223 (2004)
41. Lárusson, F.: Mapping cylinders and the Oka principle. Indiana Univ. Math. J. **54**, 1145–1159 (2005)
42. Leiterer, J.: Holomorphic vector bundles and the Oka-Grauert principle. (Russian) Itogi Nauki i Tekhniki, Current problems in mathematics. Fundamental directions **10**, 75–121, 283, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow (1986)
43. Majcen, I.: Closed holomorphic 1-forms without zeros on Stein manifolds. Math. Z. **257**, 925–937 (2007)
44. Majcen, I.: Embedding certain infinitely connected subsets of bordered Riemann surfaces properly into $\mathbb{C}^2$. J. Geom. Anal. **19**, 695–707 (2009)
45. Milnor, J.: Morse Theory. Ann. Math. Studies **51**, Princeton Univ. Press, Princeton (1963)
46. Newlander, A., Nirenberg, L.: Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. Ann. Math. (2) **65**, 391–404 (1957)
47. Oka, K.: Sur les fonctions des plusieurs variables. III: Deuxième problème de Cousin. J. Sc. Hiroshima Univ. **9**, 7–19 (1939)
48. Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur. Jap. J. Math. **23**, 97–155 (1954)
49. J. Prezelj: Interpolation of embeddings of Stein manifolds on discrete sets. Math. Ann. **326**, 275–296 (2003)
50. Prezelj, J.: A relative Oka-Grauert principle for holomorphic submersions over 1-convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. (to appear)
51. Remmert, R.: Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes. C. R. Acad. Sci. Paris **243**, 118–121 (1956)
52. Schürmann, J.: Embeddings of Stein spaces into affine spaces of minimal dimension. Math. Ann. **307**, 381–399 (1997)
53. Siu, J.-T.: Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood. Invent. Math. **38**, 89–100 (1976)

54. Stein, K.: Analytische Funktionen mehrerer komplexer Vernderlichen zu vorgegebenen Periodizitẗsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. Math. Ann. **123**, 201–222 (1951)
55. Stout, E. L.: Polynomial convexity. Progress in Mathematics **261**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston (2007)
56. Szabó, Z.: Lecture notes on Heegaard Floer homology. Low dimensional topology, 197–228, IAS/Park City Math. Ser., 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2009)

E-mail address: `franc.forstneric@fmf.uni-lj.si`