Pravična delitev in delitev brez zavisti

Martin Juvan, FMF UL

(Seminar *Matematične igre II*, DMFA, Ljubljana, 18. januar 2008)

Med n oseb (poimenovali jih bomo *igralci*) želimo "pravično" razdeliti enega ali več predmetov. Vsak igralec ima svoje vrednotenje predmetov oz. njihovih delov.

Predmeti: Predmeti so lahko nedeljivi ali pa deljivi.

- Če je predmet nedeljiv, ga je treba v celoti dodeliti enemu igralcu.
- Če je predmet deljiv, ga lahko razdelimo na dele in posamezne dele dodelimo različnim igralcem.

Kadar imamo opraviti z deljivimi predmeti, je v navadi, da obravnavamo en sam predmet, ki ga običajno poimenujemo *torta* (angl. cake).

PREDPOSTAVKA: Če torto razdelimo, je za vsakega igralca vsota vrednosti dobljenih delov enaka vrednosti celote pred razdelitvijo. Brez škode lahko tudi predpostavimo, da je za vsakega igralca vrednost celotne torte enaka 1.

Pravičnost: Ogledali si bomo dve vrsti "pravičnosti".

- Delitev je *poštena* oz. *pravična* (angl. fair), če vsak igralec ocenjuje, da je tisto, kar je dobil, vredno vsaj $1/n$ celote.
- Delitev je *brez zavisti* (angl. envy-free), če vsak igralec ocenjuje, da je njegov delež vreden vsaj toliko, kot so glede na njegovo vrednotenje vredni deleži, ki so jih dobili drugi igralci.

Denar: Nekateri postopki bodo za vsakega igralca poleg prejetih predmetov izračunali tudi velikost *denarnega nadomestila*. To pomeni, da bo igralec poleg predmetov dobil oziroma moral plačati še nekaj denarnih enot. Denarna nadomestila nam predvsem pri nedeljivih predmetih omogočijo, da lahko dosežemo pravičnost razdelitve.

Denar je sredstvo, ki ga vsi igralci vrednotijo enako, in je poljubno zamenljiv za predmete. To pomeni, da je igralcu vseeno, ali dobi predmet ali pa toliko denarnih enot, kot je njegovo vrednotenje predmeta.

Postopki: Od postopkov za "pravično" delitev pričakujemo naslednjo lastnost:

Če se igralec drži navodil, potem dobi tak delež, kot mu ga obljublja postopek.

Gornja lastnost mora veljati ne glede na to, ali se drugi igralci držijo navodil ali ne, morda sodelujejo med seboj ipd.

Če postopek uporablja denarna nadomestila, potem je zaželeno, da ne potrebuje zunanjega financiranja (vsota denarnih nadomestil, ki jih plačajo igralci, ne sme biti manjša od vsote denarnih nadomestil, ki jih dobijo igralci).

Pravična delitev, delež vsaj $1/n$

Postopek "Reži in izberi" (za 2 igralca)

Postopek "Premikajoči nož" (za n igralcev)

Postopek (Postopek z obrezovanjem (angl. trimming method) za 3 igralce):

1. Rok odreže kos torte, za katerega meni, da ima vrednost 1/3.
2. Ta kos poda Ani, ki ga obreže, če ima zanjo vrednost več kot 1/3. Obrezan kos, ki ima sedaj tudi zanjo vrednost točno 1/3, poda naprej Petru.
3. Če Peter meni, da ima podani kos vrednost vsaj 1/3, ga vzame. V nasprotnem primeru ga poda nazaj Ani, ki ga mora sprejeti, če ga je obrezala. Če ga ni, kos pripada Roku. Tisti igralec, ki je sprejel kos, izpade iz igre.
4. Preostala igralca uporabita postopek reži in izberi na preostalem delu torte.

Postopek z obrezovanjem lahko preprosto posplošimo na poljubno število igralcev. V najslabšem primeru je število rezov približno $n^2/2$.

Postopek (Deli in vladaj za n igralcev):

Pravična razdelitev torte X med n igralcev $P_1, \ldots, P_n$.

1. Če je $n = 1$, dobi igralec P_1 celo torto.
2. Če je $n \geq 2$, imamo dve možnosti:
   a) $n = 2k$
      (a) Vsi igralci razen P_n naj razrežejo (označijo) torto z vzporednimi rezi v razmerju $k : k$. Del torte levo od k-tega reza (oznake) označimo z A.
      (b) Igralec P_n izbere večjega izmed kosov A in $X \setminus A$.
      (c) P_n si razdeli izbrani kos s $k-1$ igralci, katerih rezi ležijo v notranjosti izbranega kosa. Ostalih k igralcev si razdeli preostali kos.
      (d) Vsaka od obeh skupin uporabi algoritem za $n = k$ na svojemu delu torte.
   b) $n = 2k + 1$
      (a) Vsi igralci razen P_n naj razrežejo (označijo) torto z vzporednimi rezi v razmerju $k : k+1$. Del torte levo od k-tega reza (oznake) označimo z A.
      (b) Igralec P_n izbere kos A, če ta predstavlja vsaj $\frac{k}{2k+1}$ celote. Sicer izbere kos $X \setminus A$.
         i. Če izbere kos A, ga razdeli s $k-1$ igralci, katerih rezi ležijo v notranjosti izbranega kosa. Ta skupina uporabi algoritem za $n = k$ in torto A. Ostalih $k+1$ igralcev uporabi algoritem za $n = k+1$ in torto $X \setminus A$.
         ii. Če izbere kos $X \setminus A$, ga deli s k igralci, katerih rezi ležijo v notranjosti izbranega kosa, pri čemer uporabijo algoritem za $n = k+1$ in torto $X \setminus A$. Ostalih k igralcev si razdeli kos A z uporabo algoritma za $n = k$.

V najslabšem primeru je število rezov približno $n \cdot \log_2 n$.

Točna delitev, delež točno $1/n$

Austinov postopek za 2 igralca

Postopek uporablja dva noža. Na začetku prvi igralec postavi prvi nož na levi rob torte, drugega pa tako, da je glede na njegovo vrednotenje vrednost torte med nožema 1/2. Nato noža počasi premika proti desnemu robu torte, pri čemer pazi, da je zanj vrednost torte med nožema ves čas enaka 1/2. Prvi nož potuje do začetnega položaja drugega noža, drugi nož pa potuje do desnega roba torte. Ko drugi igralec oceni, da je tudi glede na njegovo vrednotenje med nožema vrednost 1/2, reče "stop".

Delitev brez zavisti (moj delež večji ali enak vsem drugim deležem)

Postopek "Reži in izberi" ne poišče le pravične delitve torte med 2 igralca, ampak je dobljena delitev tudi brez zavisti.

Postopek (Conway, Guy, Selfridge za 3 igralce):

1. Rok razreže torto X na tri enake kose, kar pomeni
$$\mu_R(X_1) = \mu_R(X_2) = \mu_R(X_3).$$
2. Ana jih glede na svojo mero razvrsti po velikosti od največjega do najmanjšega:
$$\mu_A(X_1) \geq \mu_A(X_2) \geq \mu_A(X_3).$$
(Kose smo brez škode preimenovali.)
3. Ana obreže X_1, $X_1' = X_1 \setminus E$, kjer je $E \subseteq X_1$ tak kos, da velja
$$\mu_A(X_1') = \mu_A(X_2).$$
4. Izmed kosov X_1', X_2, X_3 izbirajo po vrsti Peter, Ana in Rok. Ana mora izbrati X_1', če je še na razpolago.
5. Tistega, ki dobi kos X_1' (Ana ali Peter), imenujemo P_1, drugega pa P_2.
6. Igralec P_2 razreže ostanek $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ na 3 dele, za katere velja
$$\mu_{P_2}(E_1) = \mu_{P_2}(E_2) = \mu_{P_2}(E_3).$$
7. Sedaj izbirajo po vrstnem redu P_1, Rok, P_2. Vsak vzame kos, ki je med preostalimi kosi zanj najboljši.

Opomba: Postopek naredi 5 rezov (dva na koraku 1, enega na koraku 3, dva na koraku 6).

Postopek (Brams, Taylor, Zwicker za 4 igralce):

1. Igralca P_1 in P_2 naj razrežeta torto X na 4 enake dele $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$. Za te kose mora veljati
$$\mu_{P_1}(X_i) = \mu_{P_2}(X_i) = \tfrac{1}{4}, \quad \text{kjer je } i = 1, 2, 3, 4.$$
Tako delitev dosežeta, če trikrat uporabita Austinov postopek.

2. Igralec P_3 naj kose razporedi po velikosti (po potrebi kose preimenujemo):
$$\mu_{P_3}(X_1) \geq \mu_{P_3}(X_2) \geq \mu_{P_3}(X_3) \geq \mu_{P_3}(X_4).$$

3. Igralec P_3 naj obreže kos $X_1 = X_1' \cup E$, tako da velja
$$\mu_{P_3}(X_1') = \mu_{P_3}(X_2).$$

4. Izmed kosov X_1', X_2, X_3, X_4 prvi izbira igralec P_4.
   (a) Če P_4 izbere kos X_1', potem ostali izbirajo po vrsti P_3, P_2, P_1.
   (b) Če P_4 ne izbere kosa X_1', potem mora igralec P_3 vzeti kos X_1', nato pa izbereta svoja kosa še preostala igralca P_1 in P_2.

5. Igralca, ki prejme kos X_1' (kandidata sta P_3 in P_4), poimenujemo I (izbiralec), drugi kandidat pa se imenuje D (delitelj).

6. Delitelj in igralec P_2 razrežeta ostanek $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ na 4 dele, tako da velja
$$\mu_{P_2}(E_i) = \frac{\mu_{P_2}(E)}{4} \quad \text{in} \quad \mu_D(E_i) = \frac{\mu_D(E)}{4} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$
To dosežeta z Austinovim postopkom.

7. Kose ostanka izberejo po vrsti I, P_1, D in P_2.

Postopek Bramsa in Taylorja za n igralcev (končen, neomejen)

S. J. Brams, A. D. Taylor, *An envy-free cake division protocol*, *Amer. Math. Monthly* **102** (1995), str. 9–18

Knasterjev postopek zapečatenih ponudb

n igralcev, m predmetov
↖ nedeljivi

denarna nadomestila

Postopek

1. Vsak igralec v zapečateni kuverti poda svoje vrednotenje za vsakega od predmetov (zapečatene ponudbe).

2. Predmete dobijo najboljši ponudniki. (Če več enakih ponudb, potem poljubno.)

3. Denarna nadomestila določimo tako, da vsak igralec dobi točno svoj pravičen delež (tj. $\frac{1}{n}$ od celote).

Velja: Za denarna nadomestila ne potrebujemo zunanjega financiranja.

MATEMATIČNO BISTVO POSTOPKA

4. Morebitni preostanek vplačil lahko porabimo npr. za stroške postopka ali pa ga enakomerno razdelimo med igralce.

Opomba. Lahko pride do zavisti.

Primer.

Vhodni podatki ("zapečatene ponudbe")

		1	2	3	4
igralci	A	$\boxed{300}$	80	100	$\boxed{90}$
	B	50	$\boxed{320}$	170	60
	C	250	200	$\boxed{180}$	90

Predmete dodelimo najboljšim ponudnikom (pri predmetu 4 sta dva najboljša; odločimo se naključno).

Opravimo izračun za denarna nadomestila:

	pravični delež	dobil s predmeti	doplačilo
A	190	390	200
B	200	320	120
C	240	180	−60
			vsota = 260

negativna vrednost pomeni, da igralec denar dobi

ostanek

LASTNOST POSTOPKA JE, DA JE TA VSOTA VEDNO ≥ 0

Kratka utemeljitev:
Predmete "zamenjamo" za denar po najvišji ceni, doplačila "računamo" po povprečni ...

Poglejmo še, kako je z zavistjo:

	A	B	C
A	190	(80−120) −40	(100+60) 160
B	(50+60−200) −90	200	(170+60) 230
C	(250+90−200) 140	(200−120) 80	240

ZAVIST

Delitev brez zavisti ob denarnih nadomestilih

n igralcev, n (skupin) predmetov

Iščemo
- razdelitev predmetov (vsakemu igralcu enega)
- denarna nadomestila

Ne sme biti zavisti.

Postopek:

① Določimo razdelitev predmetov.
Razdelimo tako, da za njih iztržimo čim več.
Vsak igralec plača svojo ceno c_i za predmet, ki ga dobi. ← dobi predmet i (tako označimo)

V nadaljevanju računamo popuste d_i.

② Izračunamo pomožno matriko A:

$$a_{ij} := b_{ij} - c_j = b_{ij} - b_{jj} + d_j$$

d_j ← popust (na zač. $=0$)

b_{jj} ← plačilo igr. j za predmet j

b_{ij} ← vrednost, ki jo za igralca i predstavlja predmet j

a_{ij} ← koliko se zdi igr. i, da je dobil igralec j

③ Naredimo en krog poračunavanj:
- Določimo zavistne igralce, ki zavidajo nezavistnim igralcem (le "maksimalno")
- Zavistnim damo toliko popusta, da se izenačijo z nezavistnimi.

Vrnemo se na ②.

Primer.

Tabela 5: Ponudbe igralcev za skupine predmetov

	B_1	B_2	B_3	B_4
P1	$\boxed{50}$	20	10	20
P2	60	$\boxed{40}$	15	10
P3	0	40	$\boxed{25}$	35
P4	50	35	10	$\boxed{30}$
~~Odobreno plačilo~~ vrednost doblj. predmetov	50	40	25	30

Vhodni podatki in opravljen korak 1.

Začetna "izplačila" so 145 enot.

Izračunamo matriko z ocenami vrednosti dobljenega:

	P1	P2	P3	P4
P1	0	−20	−15	−10
P2	10	0	−10	−20
P3	−50	0	0	5
P4	0	−5	−15	0

Začetni popusti so enaki 0. (Vidimo jih na diagonali.)

Zavidanje: P2 zavida P1, P3 zavida P4.

Dodelimo popuste: P2 dobi 10, P3 dobi 5

	P1	P2	P3	P4
P1	0	−10	−10	−10
P2	10	10	−5	−20
P3	−50	10	5	5
P4	0	5	−10	0
popusti	0	10	5	0

Nova zavist: P3, P4 do P2

Novi popusti:
P3 in P4 po 5 enot.

Tabela 8: Nezavistna vrednostna matrika

	P1	P2	P3	P4
P1	0	−10	−5	−5
P2	10	10	0	−15
P3	−50	10	10	10
P4	0	5	−5	5
Popust	0	10	10	5
	5	15	15	10
Cene	45	25	10	20

Razdelili smo 25 enot popusta. Ostane še 120 enot.

Recimo $C = 100$, ostanek 20 enakomerno po 5 dodatnega popusta vsakemu.

Lastnosti postopka.

1) Na polj. koraku postopka je največja permutacijska vsota po diagonali A.

2) Na nobenem koraku postopka "graf" ne vsebuje cikla.

   točke grafa: igralci

   povezave: $i \longrightarrow j$ i maksimalno zavida j

   $i \dashrightarrow j$ i izenačen z j zaradi "poračuna", ki je na prej. korakih odpravil zavist

3) Na začetku obstaja igralec, ki ostane nezavisten skozi celoten postopek.

4) Postopek potrebuje $\leq n-1$ krogov poračunavanj, da odpravi zavist.

5) Če vsak igralec izpolnjuje pogoj

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \geq C, \leftarrow \text{cena izvedbe postopka (lahko } C=0\text{)}$$

potem na koncu postopka dodeljeni popusti ne presegajo začetnih vplačil, zmanjšanih za C.